Diario delle lezioni di

Complementi di Probabilità

a.a. 2009/2010

12/10 - lezioni 1, 2, 3
Richiami su algebre e σ-algebre. Esercizi. Richiami su misure (teoremi di estensione, monotonia). Misure di probabilità.

[cfr. Williams, Cap. 1; Esercitazione I]

14/10 - lezioni 4, 5, 6
Esercizi su spazi misurabili. Spazi di probabilità. Proprietà vere q.c. $\liminf$ e $\limsup$ di eventi. La convergenza q.c. Il primo lemma di Borel Cantelli. Richiami sulle funzioni misurabili e le loro proprietà.

[cfr. Williams, Cap. 2 e 3, Esercitazione II]

19/10 - lezioni 7, 8, 9
Variabili aleatorie reali: σ-algebra generata, leggi, funzioni di ripartizione. Teorema di rappresentazione di Skorohod per v.a. reali. V.a. misurabili rispetto alla σ-algebra generata da una v.a.

[cfr. Williams, Cap. 3, Esercitazione III]

21/10 - lezioni 10, 11, 12
Esercizi su v.a. e leggi. Definizione di σ-algebre, di v.a. e di eventi indipendenti. Due σ-algebre sono indipendenti se e solo se la fattorizzazione che dà luogo all'indipendenza avviene su π-system che le generano. Confronto tra la "vecchia" e la "nuova" definizione di indipendenza. Il secondo lemma di Borel Cantelli. La σ-algebra coda.

[cfr. Williams, Cap. 4; Esercitazione III]

26/10 - lezioni 13, 14, 15
La legge 0-1 di Kolmogorov. Misurabilità del $\liminf$ e del $\limsup$ rispetto alla σ-algebra coda. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 4; Esercitazione IV]

28/10 - lezioni 16, 17, 18
Richiami sull'integrale di Lebesgue su spazi astratti: proprietà dell'integrale (monotonia, linearità, additività etc.); lo spazio $\mathscr{L}^1(S,\Sigma,\mu)$; teoremi di convergenza: convergenza monotona, lemmi di Fatou, convergenza dominata, lemma di Scheffé. Misure assolutamente continue e equivalenti. Teorema di Radon-Nicodym. L'asserzione *se* $\nu \ll \mu$ *allora* $f \in \mathscr{L}^1(S,\Sigma,\nu)$ *se e solo se* $f\frac{d\nu}{d\mu} \in \mathscr{L}^1(S,\Sigma,\mu)$. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 5; Esercitazione V]

02/11 - lezioni 19, 20, 21
Definizione di media. I teoremi di convergenza riscritti in termini probabilistici. Cambi di misure a.c. di probabilità: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ come integrale rispetto a $\mathbb{P}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Le disuguaglianze di Markov, Jensen, Cauchy-Schwarz. Gli spazi $\mathscr{L}^p$ e L^p. L'inclusione $\mathscr{L}^r \subset \mathscr{L}^p$ quando $r \geq p \geq 1$. Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski.

[cfr. Williams, Cap. 6; Esercitazione V]

04/11 - lezioni 22, 23, 24
La media come integrale rispetto alla legge. Lo spazio di Hilbert $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Varianza e covarianza: definizione e proprietà. Indipendenza implica covarianza nulla ma non il viceversa.

[cfr. Williams, Cap. 6; Esercitazione V]

09/11 - lezioni 25, 26, 27
La convergenza in probabilità. Relazioni con la convergenza q.c. e la convergenza in $\mathscr{L}^p$. Alcuni controesempi. La Legge Forte dei Grandi Numeri[1]. Il teorema di Weierstrass come raffinamento della LFGN.

[cfr. Williams, Cap. A13 e Cap. 7; Esercitazione VI]

11/11 - lezioni 28, 29, 30
Esercizi sulla convergenza. Spazi prodotto: σ-algebra prodotto, misura prodotto.

[cfr. Williams, Cap. 8; Esercitazione VII]

16/11 - lezioni 31, 32, 33
Teorema di Fubini. Leggi e funzioni di distribuzione congiunte. V.a. congiunte e assoluta continuità. Indipendenza e legge congiunta come misura prodotto delle leggi marginali. Esistenza di una successione di v.a. i.i.d. con leggi date. Esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 8; Esercitazione VII]

18/11 - lezioni 34, 35, 36
La funzione caratteristica di v.a. o leggi su $\mathbb{R}^d$. Proprietà (in particolare, continuità e differenziabilità). La funzione caratteristica delle leggi gaussiane su $\mathbb{R}^d$. Il teorema di inversione di Lévy[2]. Il teorema di caratterizzazione tra leggi e funzioni caratteristiche.

[cfr. Williams, Cap. 16; Baldi, Cap. 2]

23/11 - lezioni 37, 38, 39
Il teorema di inversione per le densità[3]. Esercizi ed esempi sulle funzioni caratteristiche. Convergenza debole. La convergenza q.c., in probabilità e in L^p implicano la convergenza debole di v.a. La formulazione pratica (convergenza delle funzioni di distribuzione nei punti di continuità della funzione-limite). Il teorema di rappresentazione di Skorohod, II. Il teorema di Helly-Bray.

[cfr. Williams, Cap. 17; Esercitazione VIII]

25/11 - lezioni 40, 41, 42

---

[1] Nella versione per v.a. i.i.d. con momento secondo.
[2] Senza dimostrazione.
[3] Senza dimostrazione.

La *tightness* come condizione necessaria per la convergenza debole e condizione sufficiente perché la sottosuccessione data dal teorema di Helly-Bray converga debolmente. Il teorema di continuità di Lévy. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 17; Esercitazione IX]

30/11 - lezioni 43, 44, 45
Il Teorema Limite Centrale. La formula di Stirling come conseguenza del TLC. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 18; Esercitazione X]

02/12 - lezioni 46, 47
Esercizi di preparazione all'esonero.

14/12 - I esonero

16/12 - lezioni 48, 49, 50
La media condizionale. Prime proprietà. Esempi: media condizionale ad una σ-algebra generata da una partizione di Ω; media condizionale di di una v.a. X data una v.a. Y nel caso (X, Y) assolutamente continua.

[cfr. Baldi, Cap. 3, Par. 1 e 2; Esercitazione XI]

17/12 - lezioni 51, 52, 53
Teoremi di convergenza per le medie condizionali; la disuguaglianza di Jensen; conseguenze (per $p \geq 1$, se $X \in L^p$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) \in L^p$; $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ come la proiezione ortogonale di $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ su $L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$). Calcolo di $\mathbb{E}(\psi(X, \cdot) \mid \mathscr{G})$ quando X è $\mathscr{G}$-misurabile e $\omega \mapsto \psi(x, \omega)$ è una v.a. indipendente da $\mathscr{G}$, per ogni x fissato. Cenni sulla probabilità condizionale. Esercizi.

[cfr. Baldi, Cap. 3, Par. 2; Esercitazione XI]

11/01 - lezioni 54, 55, 56
Filtrazioni, processi e processi adattati. Tempi d'arresto: definizione, proprietà, esempi. Martingale, supermartingale e submartingale a tempo discreto: definizioni equivalenti. Passeggiate aleatorie. Martingale arrestate. Il teorema d'arresto di Doob.

[cfr. Baldi, Cap. 1, Par. 2; Cap. 4 Par 1 e 2; Esercitazione XII]

13/01 - lezioni 57, 58, 59
Il problema della rovina del giocatore. Esercizi su martingale e tempi d'arresto. Definizione di *upcrossing* e lemma[4] sugli *upcrossing*. Il teorema di convergenza q.c. per supermartingale. Convergenza q.c. per martingale limitate in L^1.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 3; Esercitazione XIII]

18/01 - lezioni 60, 61, 62
La disuguaglianza di Doob. Conseguenza: il teorema di convergenza in L^p per $p > 1$. Convergenza in L^1 di martingale: uniforme integrabilità.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 4 e 5; Esercitazione XIII]

20/01 - lezioni 63, 64
Esempi ed esercizi. Complementi sulla distribuzione condizionale.

[4] Senza dimostrazione.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 3; Esercitazione XIII]

27/01 - lezioni 65, 66
Esercizi di preparazione all'esame.

28/01 - II esonero