Diario delle lezioni di

Complementi di Probabilità

a.a. 2008/2009

29/10 - lezioni 1, 2, 3
Richiami ed esercizi su algebre, σ-algebre, misure, misure di probabilità. Il primo lemma di Borel Cantelli.

[cfr. Williams, Cap. 1, 2; Esercitazione I]

05/11 - lezioni 4, 5, 6
Richiami sulle funzioni misurabili e le loro proprietà. Variabili aleatorie reali: leggi, funzioni di ripartizione. Definizione di convergenza q.c. Teorema di rappresentazione di Skorohod per v.a. reali.

[cfr. Williams, Cap. 3, Esercitazione II]

07/11 - lezioni 7, 8, 9
V.a. misurabili rispetto alla σ-algebra generata da una v.a. Esercizi su v.a. e leggi. Definizione di σ-algebre e di v.a. indipendenti. Due σ-algebre sono indipendenti se e solo se la fattorizzazione che dà luogo all'indipendenza avviene su π-system che le generano.

[cfr. Williams, Cap. 3 e 4; Esercitazione III e IV]

12/11 - lezioni 10, 11, 12
Confronto tra la "vecchia" e la "nuova" definizione di v.a. indipendenti. Il secondo lemma di Borel Cantelli. La σ-algebra coda: misurabilità del $\liminf$ e del $\limsup$. La legge 0-1 di Kolmogorov. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 4; Esercitazione IV]

19/11 - lezioni 13, 14, 15
Richiami sull'integrale di Lebesgue su spazi astratti: proprietà dell'integrale (monotonia, linearità, additività etc.); lo spazio $\mathscr{L}^1(S, \Sigma, \mu)$; teoremi di convergenza: convergenza monotona, lemmi di Fatou, convergenza dominata, lemma di Scheffé. Misure assolutamente continue e equivalenti. Teorema di Radon-Nicodym. L'asserzione *se* $\nu \ll \mu$ *allora* $f \in \mathscr{L}^1(S, \Sigma, \nu)$ *se e solo se* $f \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathscr{L}^1(S, \Sigma, \mu)$. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 5; Esercitazione V]

21/11 - lezioni 16, 17, 18
Definizione di media. La media come integrale rispetto alla legge. I teoremi di convergenza riscritti in termini probabilistici. Cambi di misure a.c. di probabilità: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ come integrale rispetto a $\mathbb{P}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Le disuguaglianze di Markov, Jensen, Cauchy-Schwarz. Gli spazi

$\mathscr{L}^p$ e L^p. L'inclusione $\mathscr{L}^r \subset \mathscr{L}^p$ quando $r \geq p \geq 1$. Varianza e covarianza: definizione e proprietà. Indipendenza implica covarianza nulla ma non il viceversa.

[cfr. Williams, Cap. 6; Esercitazione V]

26/11 - lezioni 19, 20, 21
Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski. La convergenza in probabilità. Relazioni con la convergenza q.c. e la convergenza in $\mathscr{L}^p$. Esempi, controesempi, esercizi. La Legge Forte dei Grandi Numeri (nella versione per v.a. i.i.d. con momento secondo).

[cfr. Williams, Cap. 6 e 7]

28/11 - lezioni 22, 23, 24
Esercizi e complementi sulla LFGN e sulla convergenza q.c., in probabilità e in $\mathscr{L}^p$.

[cfr. Williams, Cap. A13; Esercitazione VI]

03/12 - lezioni 25, 26, 27
Spazi prodotto: σ-algebra prodotto, misura prodotto. Teorema di Fubini. Leggi e funzioni di distribuzione congiunte. V.a. congiunte e assoluta continuità.

[cfr. Williams, Cap. 8; Esercitazione VII]

05/12 - lezioni 28, 29, 30
Indipendenza e legge congiunta come misura prodotto delle leggi marginali. Esistenza di una successione di v.a. i.i.d. con leggi date. La funzione caratteristica: definizione, prime proprietà. Il teorema di inversione di Lévy.

[cfr. Williams, Cap. 8 e 16]

10/12 - lezioni 31, 32, 33
Convergenza debole. La convergenza q.c. e in probabilità implicano la convergenza debole di v.a. La formulazione pratica (convergenza delle funzioni di distribuzione nei punti di continuità della funzione-limite). Il teorema di rappresentazione di Skorohod, II. Esercizi ed esempi.

[cfr. Williams, Cap. 17; Esercitazione VIII]

12/12 - lezioni 34, 35, 36
Il teorema di Helly-Bray. La *tightness* come condizione necessaria per la convergenza debole e condizione sufficiente perché la sottosuccessione data dal teorema di Helly-Bray converga debolmente. Il teorema di continuità di Lévy. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 17; Esercitazione IX]

17/12 - lezioni 37, 38, 39
Esercizi e complementi sulla convergenza. Il teorema di Weierstrass sull'approssimazione uniforme di funzioni continue su un compatto tramite polinomi (dimostrato con tecniche probabilistiche).

[cfr. Williams, Cap. 7]

19/12 - lezioni 40, 41
Esercizi di preparazione all'esonero.
20/12- I esonero

07/01 - lezioni 42, 43, 44

Il Teorema Limite Centrale. La formula di Stirling come conseguenza del TLC. La media condizionale: definizione e prime proprietà. Esempio: media condizionale ad una σ-algebra generata da una partizione di Ω.

[cfr. Williams, Cap. 18 e Esercitazione X; Cap. 9]

09/01 - lezioni 45, 46, 47
Media condizionale di di una v.a. X data una v.a. Y. Esempio: caso (X, Y) discreta o assolutamente continua. La media condizionale a $\mathscr{G}$ di $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ come proiezione ortogonale di X su $L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$. Le proprietà della media condizionale.

[cfr. Williams, Cap. 9; Esercitazione XI]

14/01 - lezioni 48, 49, 50
La probabilità condizionale e le versioni "regolari" della probabilità condizionale. Leggi condizionali e versioni regolari. Esercizi ed esempi. Processi a tempo discreto. Filtrazioni e processi adattati. Definizione di martingala, supermartingala e submartingala. Esempio: passeggiate aleatorie.

[cfr. Williams, Cap. 9 e 10]

16/01 - lezioni 51, 52, 53
Definizioni equivalenti per le martingale. Proprietà, esempi ed esercizi. Tempi d'arresto: definizione e proprietà. Martingale arrestate. Esempi. Il teorema d'arresto di Doob.

[cfr. Williams, Cap. 10; Esercitazione XII]

21/01 - lezioni 54, 55, 56
Il problema della rovina del giocatore: calcolo della probabilità di rovina con il teorema d'arresto di Doob. Definizione di[1] *upcrossing* e lemma di Doob sugli *upcrossing* (senza dimostrazione). Il teorema di convergenza di Doob per supermartingale limitate in L^1. Martingale limitate in L^2: ortogonalità in L^2 degli incrementi; il teorema di convergenza.

[cfr. Williams, Cap. 11 e 12; Esercitazione XII]

23/01 - lezioni 57, 58 Esercizi e complementi sulle martingale.

26/01 - lezioni 59, 60 Esercizi di preparazione all'esonero.

29/01 - II esonero

[1] Si è seguito il testo di P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni. Seconda edizione.* Pitagora Editrice, 2000.