

PROGRAMMA DI METODI E MODELLI DEI MERCATI FINANZIARI  
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN MATEMATICA APPLICATA  
UNIVERSITÀ TOR VERGATA  
A.A. 2007/2008  
CREDITI: 7  
DOCENTE: LUCIA CARAMELLINO

## Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova orale, che comprende anche una discussione sugli algoritmi di simulazione analizzati durante il corso. I programmi con l'implementazione della risoluzione degli esercizi vanno consegnati al docente tre-quattro giorni prima della data d'esame (tramite supporto oppure via e-mail all'indirizzo: [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it); nel programma che segue sono elencati tutti gli esercizi richiesti).

**Nota:** Si fa esplicita richiesta di utilizzo di un *linguaggio di programmazione* (ad es. C, C++, Pascal etc., ma non Scilab o analoghi *software*), a scelta dello studente.

**Nota 2:** Per agevolare gli studenti di Corsi di Laurea che prevedono un corso di Finanza con un numero di crediti  $< 7$ , si richiede lo studio della sola Parte I.

## Testi consigliati

- P. Baldi: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni. Seconda edizione.* Pitagora Editrice, 2001.
- D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman and Hall, 1996.
- Appunti su *Calcolo stocastico ed applicazioni alla Finanza* distribuiti dal docente.
- Appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* distribuiti dal docente.
- Appunti su *Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza* distribuiti dal docente.
- P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering.* Springer-Verlag, 2004.

All'indirizzo [http://www.mat.uniroma2.it/~caramell/did\\_0607/mmf.htm](http://www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_0607/mmf.htm) è possibile scaricare gli appunti.

# Programma

## PARTE I

### Richiami di calcolo stocastico

Integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito; teorema di rappresentazione delle martingale Browniane; equazioni differenziali stocastiche, teorema (locale) di esistenza ed unicità, markovianità della soluzione.

[cfr. Baldi, Capitoli 6,7 e 8; Lamberton e Lapeyre, Capitolo 3]

### Il modello di Black e Scholes

Il modello di Black e Scholes. Stragie autofinanzianti, ammissibili, replicanti. Portafoglio replicabile. Prezzo delle opzioni europee. La formula di Black e Scholes. Alcuni problemi riconducibili al modello di Black e Scholes: il modello di Garman-Kohlhagen (opzioni su valute); opzioni di scambio; strategie con consumo; opzioni composte call su call; opzioni asiatiche.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Capitolo 4 e Problemi 2, 3, 4, 5, 7 al Cap. 4]

### Modelli di diffusione per i mercati finanziari

Modelli di diffusione per l'evoluzione dei prezzi in un mercato finanziario. Strategie autofinanzianti e ammissibili; misure di martingala equivalenti; arbitraggio; strategie replicanti. Completezza del mercato; prezzo di opzioni europee. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea; le greche di un'opzione europea. Formule di rappresentazione per soluzioni di equazioni alle derivate parziali paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet) e paraboliche su  $\mathbb{R}^n$  (problema di Cauchy); formula di Feynman-Kac. Connessioni con la finanza.

[cfr Paragrafi 1 e 2 degli appunti su *Calcolo stocastico ed applicazioni alla Finanza*; Baldi, Capitolo 9]

### Metodi numerici per la finanza

Il metodo Monte Carlo: stima di medie ed intervallo di confidenza. Simulazione di un moto Browniano e di un moto Browniano geometrico. Metodi numerici per la finanza: uso del metodo Monte Carlo. In particolare, seguendo il modello di Black e Scholes, si richiede l'implementazione un programma per il:

- calcolo numerico del prezzo della call e della put con Monte Carlo, con intervallo di confidenza al 95% e studio numerico della convergenza del prezzo call/put alla formula di Black e Scholes;
- calcolo numerico del prezzo di una call asiatica con Monte Carlo, con intervallo di confidenza al 95%;

- calcolo numerico del prezzo di un'opzione di scambio e di una digital su due asset con Monte Carlo, con intervallo di confidenza al 95%;
  - calcolo numerico della delta con le differenze finite e con Monte Carlo tramite la rappresentazione delle derivate come opportune aspettative;
  - calcolo della copertura dinamica e uguaglianza finale con il *payoff* dell'opzione.
- [cfr appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* o anche Glasserman]

## PARTE II

Gli studenti che hanno seguito il corso possono scegliere tra i due seguenti argomenti:

- 1. Introduzione alle opzioni americane**
- 2. Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza**

Per tutti gli altri, si richiede l'argomento in **1**.

### 1. Introduzione alle opzioni americane

Strategie "americane", strategie autofinanzianti e di arbitraggio; prezzo "di non arbitraggio" delle opzioni americane. Comportamento della put americana nel modello di Black e Scholes. Cenni sulla disequazione variazionale associata al prezzo delle opzioni americane. [cfr Paragrafo 3 degli appunti su *Calcolo stocastico e applicazioni alla Finanza*; Teorema 5.3.2 pag. 111 di Lamberton e Lapeyre]

### 2. Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza

La formula di integrazione per parti astratta ed uso per: la sensitività rispetto al dato iniziale, la densità della legge, le medie condizionate. Il calcolo di Malliavin-Browniano: il caso finito dimensionale. Operatori differenziali, definizioni principali e proprietà. L'estensione al caso infinito dimensionale. Esempi. Applicazioni in Finanza: studio delle sensitività; aspettative condizionali.

[cfr appunti su *Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza*]

Lucia Caramellino  
Dipartimento di Matematica  
Università di Roma-Tor Vergata  
web: [www.mat.uniroma2.it/~caramell](http://www.mat.uniroma2.it/~caramell)  
email: [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it)