Calcolo numerico con Monte Carlo del Prezzo di Opzioni Asiatiche

Francesca Panetta
Federico Sabato

1 Opzioni

Una opzione è un contratto che dà diritto, ma non l'obbligo, a chi lo detiene di acquistare (o vendere, a seconda del tipo d'opzione) un bene (il sottostante) ad una prefissata data *(data di maturità)* e ad un prezzo prefissato *(il prezzo di esercizio o strike)*. Le opzioni che danno diritto ad acquistare si chiamano call, quelle che danno diritto a vendere put. Ci sono molti tipi di opzioni,per esempio:
-Opzioni europee
-Opzioni americane
-Opzioni asiatiche

Le opzioni europee sono quelle per le quali si ha diritto di esercitare l'opzione unicamente al tempo di maturità.

Le opzioni americane sono quelle per le quali il detentore ha il diritto di esercitare l'opzione in qualunque istante compreso tra il tempo di emissione ed il tempo di maturità. Riserveremo un paragrafo specifico per le opzioni asiatiche.
In generale, le opzioni sono state concepite per ridurre i rischi degli operatori finanziari, in quanto possono essere usate anche a scopo speculativo. Tali speculazioni sono ad alto rischio, possono cioè produrre grossi guadagni, ma è anche molto elevata la possibilità di perdere la totalita della somma investita.

2 Opzioni Asiatiche

Le opzioni asiatiche (*asian o average rate options)* appartengono alla famiglia dell opzioni sentiero dipendenti (*path dependent*) in quanto il loro profitto dipende da un valore medio calcolato sulla base di prezzi che si riferiscono a un predeterminato insieme di osservazioni. Negoziate per la prima volta a Tokyo alla fine degli anni '80, le opzioni asiatiche sono prepotentemente entrate nei mercati finanziari sia come attività finanziaria a se stante, sia come clausola inglobata nel regolamento di alcuni titoli finanziari. L'emergente richiesta di negoziazione delle opzioni asiatiche deriva dal fatto che tali opzioni consentono di ridurre la possibilità di manipolare i prezzi dei beni sottostanti in corrispondenza delle epoche temporali che precedono la scadenza delle opzioni. La presenza di un valore medio quale parametro fondamentale di riferimento per il calcolo del profitto di un'opzione asiatica consente di livellare la volatilità dei prezzi. I beni sottostanti le opzioni asiatiche sono tipicamente i prodotti petroliferi, i metalli preziosi, le valute estere e tutte quelle merci soggette a negoziazioni non molto frequenti ma di consistente controvalore. A differenza di quanto accade per le opzioni ordinarie, che vengono normalmente emesse con scadenza a 3 , 6 o 9 mesi, la durata delle opzioni asiatiche puo raggiungere i 3 anni. Il calcolo del valore medio dei prezzi, che funge da parametro fondamentale di riferimento per la determinazione del profitto di un'opzione asiatica, puo essere influenzato da diversi fattori, tra questi:

-Il periodo di tempo utilizzato per il calcolo della media.

Se l'opzione asiatica viene emessa al tempo $t_0 = 0$ e scade a $t = T$, il tempo utilizzato per calcolare la media può essere un sottoinsieme di $[0, T]$ o può iniziare anche prima dell'epoca $t_0 = 0$.
Di solito l'ultimo dato utilizzato per il calcolo della media è S_T, cioè il prezzo del bene sottostante l'opzione osservato all'epoca $t = T$.

-Il tipo di media.

Nei casi reali si fa riferimento soprattutto alla media aritmetica; talvolta, per motivi teorici, è utile considerare anche la media geometrica.

-Il tipo di campionamento.

I prezzi del bene si possono rilevare con campionamento discreto o continuo. Nel primo caso la media viene calcolata in base ad un insieme finito di prezzi $S(t_k), k = 0, 1, 2, ...n$, nel secondo caso viene effettuata con continuità istante per istante; nel nostro caso il rilevamento è stato con campionamento discreto.

Sia $[t_0 = 0, t_n = T]$ il periodo temporale di riferimento; la media aritmetica dei prezzi S_n nel caso discreto è:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S(t_k)$$

con

$$t_k = t_0 + hk, \qquad (k = 0, 1, ..., n; h = (t_n - t_0)/n)$$

Nell'ambito delle opzioni asiatiche si posso distinguere le opzioni *average price* e le opzioni *average strike*. Le prime prevedono che la media dei prezzi, calcolata ad una delle precedenti relazioni, venga considerata come prezzo finale medio, le seconde prevedono che tale media svolga il prezzo d'esercizio. Il payoff, ovvero la quantita di denaro che deve sborsare colui che cede il diritto di opzione, alla scadenza di un'opzione average price è:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k - K \right)_+ = \max\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k - K, 0 \right)$$

dove K è il prezzo di esercizio.

3 Il Metodo di Montecarlo

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. indipendenti uniformi su $[0,1]$. Allora la successione di v.a. $\{f(X_n)\}_n$ è ancora formata da v.a. indipendenti, tutte di media $E(f(X_1))$; per la legge dei grandi numeri quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \to E(f(X_1))$$

quasi certamente per $n \to \infty$. Queste osservazioni suggeriscono un metodo di calcolo numerico della media : basterà disporre di un generatore aleatorio $X_1, X_2, ...$ di legge uniforme su$[0,1]$ e quindi calcolare

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$$

che per n grande è un'approssimazione della media.

Nel programma seguente si utilizzerà proprio questo metodo generando, con il primo ciclo for, M variabili aleatorie uniformi su $[0,1]$ utilizzando la funzione $rand()$ e calcolando per ogni simulazione fissata, il *payoff* dell'Asiatica; successivamente verrà fatta la media dei *payoff*. Tale media empirica dovrà poi essere *attualizzata* moltiplicandola per il *coefficiente di sconto* che è pari a

$$\left(1+\frac{R}{N}\right)^{-N}$$

In seguito verrà anche calcolata la *varianza empirica* in questo modo:

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f(X_k)^2 - \left(\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} f(X_k)\right)^2$$

Sarà utile per il calcolo dell' *intervallo di confidenza* del prezzo, che dovrà cadere con una *probabilità del 95 per cento* nell'intervallo

$$\text{media emprica} \pm 1,96\sqrt{\frac{\text{varianza empirica}}{M}}$$

4 Programma

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
main ()
{
   double k=100, So=100;
   double T, R, sigma;
   double r,a,b,p,ran,z,Sn,media_temp,payoff,media,media_quad,
          conf_inf,conf_sup,varianza,coeff,prezzo_temp,prezzo;
   int m,M,n,N;
   printf ("Inserisci il numero M di simulazioni:\n");
   scanf ("%d",&M);
   printf ("Inserisci il numero N di periodi di tempo:\n");
   scanf ("%d",&N);
   T=1;
   R=0.05;
   sigma=0.2;
   r= (R/N)*T;
   printf ("r è: %f\n",r);
   a=(1+r)*exp((-sigma)*sqrt(T/N))-1;
   printf ("a è: %f\n",a);
   b=(1+r)*exp((sigma)*sqrt(T/N))-1;
   printf ("b è: %f\n",b);
   p=(b-r)/(b-a);
   printf ("p è: %f\n",p);
   media=0;
   media_quad=0;
   prezzo=0;
```

```
varianza=0;
for (m=1;m<=M;m++)
       {
          media_temp=So;
          Sn=So;
          for (n=1;n<=N;n++)
                 {
                  ran=rand()%32767;
                  z=ran/32767;
               if (z<p) Sn=Sn*(1+a);
                    else Sn=Sn*(1+b);
                    media_temp=media_temp+Sn ;
                  }
           media_temp=media_temp/(N+1);
           if (media_temp>k) payoff=media_temp-k;
           else payoff=0;
           prezzo=prezzo+payoff;
           media_quad=media_quad+(payoff*payoff);
       }
prezzo=prezzo/M;
printf ("la media dei payoff è=%f\n",prezzo);
coeff=exp(-N*log(1+r));
printf ("il coefficiente di sconto è: %f\n",coeff);
prezzo=coeff*prezzo;
printf ("il prezzo è: %f\n",prezzo);
varianza=(coeff*coeff*media_quad/M)-prezzo*prezzo;
conf_inf=prezzo-1.96*sqrt((varianza)/M);
conf_sup=prezzo+1.96*sqrt((varianza)/M);
printf ("il prezzo al 95percento si trova compreso tra %f",conf_inf);
printf ("e %f\n",conf_sup);
```

```
  system("PAUSE");

return 0; }
```

5 Risultati

Avendo simulato ripetute prove facendo variare il numero di simulazioni M ed il numero N di periodi che compongono l'unità di tempo (N=365 corrisponde ad un monitoraggio giornaliero, N=12 a un monitoraggio mensile, N=2 semestrale) si sono osservati i seguenti dati relativi al prezzo:

	N=365	N=12	N=2
M=10.000	5.746403	5.828015	5.941267
M=100.000	5.771975	5.743810	5.775503
M=1.000.000	5.756160	5.731771	5.769784

Qui di seguito sono riportate le simulazioni fatte con il compilatore:

1.a
Inserisci il numero M di simulazioni: 10000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 365
r: 0.000137
a: -0.010278
b: 0.010662
p: 0.502617
la media dei payoff: 6.041007
il coefficiente di sconto: 0.951233
il prezzo: 5.746403
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.589873 e 5.902934

1.b
Inserisci il numero M di simulazioni: 10000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 12
r: 0.004167
a: -0.052167
b: 0.063849
p: 0.514430
la media dei payoff: 6.126187
il coefficiente di sconto: 0.951328
il prezzo: 5.828015
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.673547 e 5.982483

1.c
Inserisci il numero M di simulazioni: 10000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 2
r: 0.025000
a: -0.110173
b: 0.180708
p: 0.535297
la media dei payoff: 6.242043
il coefficiente di sconto: 0.951814
il prezzo: 5.941267
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.798473 e 6.084060

2.a
Inserisci il numero M di simulazioni: 100000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 365
r: 0.000137
a: -0.010278
b: 0.010662
p: 0.502617
la media dei payoff: 6.067890
il coefficiente di sconto: 0.951233
il prezzo: 5.771975
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.722413 e 5.821538

2.b
Inserisci il numero M di simulazioni: 100000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 12
r: 0.004167
a: -0.052167
b: 0.063849
p: 0.514430
la media dei payoff: 6.037674
il coefficiente di sconto: 0.951328
il prezzo: 5.743810
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.695313 e 5.792306

2.c
Inserisci il numero M di simulazioni: 100000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 2
r: 0.025000
a: -0.110173
b: 0.180708
p: 0.535297
la media dei payoff: 6.067887
il coefficiente di sconto: 0.951814
il prezzo: 5.775503
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.730783 e 5.820222

3.a
Inserisci il numero M di simulazioni: 1000000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 365
r: 0.000137
a: -0.010278
b: 0.010662
p: 0.502617
la media dei payoff: 6.051264
il coefficiente di sconto: 0.951233
il prezzo: 5.756160
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.740533 e 5.771787

3.b

Inserisci il numero M di simulazioni: 1000000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 12
r: 0.004167
a: -0.052167
b: 0.063849
p: 0.514430
la media dei payoff: 6.025019
il coefficiente di sconto: 0.951328
il prezzo: 5.731771
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.716462 e 5.747079

3.c
Inserisci il numero M di simulazioni: 1000000
Inserisci il numero N di periodi di tempo: 2
r: 0.025000
a: -0.110173
b: 0.180708
p: 0.535297
la media dei payoff: 6.061879
il coefficiente di sconto: 0.951814
il prezzo: 5.769784
il prezzo al 95 percento si trova compreso tra 5.755652 e 5.783916

6 Commenti

Osservando le varie simulazioni si nota come a parità di periodi di monitoraggio (ad esempio confrontando 1.a 2.a 3.a) e aumentando il numero di simulazioni, l'$intervallo\ di\ confidenza$ diminuisce sensibilmente. Ciò vuol dire che aumentando il numero di simulazioni si ottiene una stima del prezzo sempre piu precisa e, riducendosi l'intervallo dove oscilla, diminuisce l'errore che si commette nel prezzare l'opzione. Inoltre osservando le simulazioni a parità di monitoraggio (ad esempio 1.b 2.b 3.b) si nota come i parametri r, a, b e p siano uguali,come è giusto che sia non comparendo nelle loro formule il numero di simulazioni.