Soluzioni Secondo esonero

S 1. Osserviamo anzitutto che $X_1, X_3, X_5, Y_2, Y_4, Y_6$ sono v.a. indipendenti (perché si riferiscono a lanci diversi, e i lanci sono indipendenti) e quindi Z, V, W sono anch'esse v.a. indipendenti.

a) Calcoliamo la covarianza tra T e S:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(T,S) &= \mathrm{Cov}(Z - V + 1, V + 2W) \\
&= \mathrm{Cov}(Z, V + 2W) - \mathrm{Cov}(V, V + 2W) + \underbrace{\mathrm{Cov}(1, V + 2W)}_{=0} \\
&= \underbrace{\mathrm{Cov}(Z,V)}_{=0} + 2\underbrace{\mathrm{Cov}(Z,W)}_{=0} - \underbrace{\mathrm{Cov}(V,V)}_{=\mathrm{Var}(V)} - 2\underbrace{\mathrm{Cov}(V,W)}_{=0} \\
&= -\mathrm{Var}(X_3 + Y_4) = -\Big(\mathrm{Var}(X_3) + \mathrm{Var}(Y_4)\Big) \\
&= -\frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{6}\Big) - \frac{2}{6}\Big(1 - \frac{2}{6}\Big) = -\frac{13}{36}.
\end{aligned}$$

Dunque, T e S non sono indipendenti e anzi, sono soggette ad una dipendenza di tipo negativo.

b) Nel piano (s,t), l'equazione della retta di regressione è

$$t = \frac{\mathrm{Cov}(T,S)}{\mathrm{Var}(S)}(s - \mathbb{E}(S)) + \mathbb{E}(T).$$

Poiché

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(V + 2W) = \mathbb{E}(V) + 2\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(X_3 + Y_4) + 2\mathbb{E}(X_5 + Y_6) = 3\Big(\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6}\Big) = \tfrac{3}{2} \\
&\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(W + 2W) = \mathrm{Var}(V) + 4\mathrm{Var}(W) = 5\mathrm{Var}(X_3 + Y_4) = 5\Big(\tfrac{1}{6}\tfrac{5}{6} + \tfrac{2}{6}\tfrac{4}{6}\Big) = \tfrac{65}{36} \\
&\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Z - V + 1) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(V) + 1 = 1,
\end{aligned}$$

sostituendo si ottiene

$$t = -\frac{1}{5}\Big(s - \frac{3}{2}\Big) + 1.$$

S 2. a) Dev'essere $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$, quindi

$$\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|^3}\, 1_{|x|>1} dx = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{x^2}\Big|_1^{+\infty} = 1, \quad \text{cioè } c = 1.$$

b) Osserviamo che se X ha media allora dev'essere $\mathbb{E}(X) = 0$, perché $x \mapsto xp(x)$ è una funzione dispari. Studiamo l'esistenza della media:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|^2}\, 1_{|x|>1} dx = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = -2\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 2 < \infty.$$

Quindi, $\mathbb{E}(X)$ esiste e $\mathbb{E}(X) = 0$.

Studiamo l'esistenza della varianza, che qui si riduce all'esistenza del momento secondo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|}\, 1_{|x|>1} dx = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = 2\ln x\Big|_1^{+\infty} = \infty,$$

da cui segue che X non ha varianza.

S 3. Osserviamo dapprima che se $X \sim \mathrm{Un}(-1,1)$ allora $\mathbb{E}(X) = 0$ (per simmetria) e

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

a) Si vuole n affinché $\mathbb{P}(|\bar{X}_n| < 0.1) \geq 0.99$, o equivalentemente $\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq 0.1) \leq 0.01$. Usando Chebycev, otteniamo, per ogni $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \eta) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\eta^2} = \frac{1}{3\, n\eta^2}.$$

Dunque, basta imporre che $\frac{2}{3\, n\eta^2} \leq 0.01$ quando $\eta = 0.1$, e si ottiene

$$n \geq \frac{1}{3\,\eta^2}\Big|_{\eta=0.1} \cdot 10^2 = \frac{1}{3}\cdot 10^4.$$

b) Ricordiamo che il TLC garantisce, per n grande, che $\mathbb{P}(S_n^* > a) \simeq 1 - \Phi(a)$, dove qui $S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n/3}$. Ora, poiché $\sum_{i=1}^{100} X_i/10 = S_{100}^*/\sqrt{3}$, usando l'approssimazione gaussiana otteniamo

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{100} X_i > -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{S_{100}^*}{\sqrt{3}} > -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(S_{100}^* > -1\Big) \simeq 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.84134$$

S 4. Se indichiamo "successo"="la pagina analizzata contiene un errore", è evidente che il numero di pagine che sono da correggere è una v.a. binomiale di parametri $n = 400$ e $p = 0.02$. Se indichiamo con S_{400} tale v.a., si chiede $\mathbb{P}(S_{400} < 4)$. Calcoliamo approssimativamente questa probabilità, usando l'approssimazione gaussiana con correzione:

$$\mathbb{P}(S_{400} < 4) = \mathbb{P}(S_{400} \leq 3) = \mathbb{P}(S_{400} \leq 3.5)$$
$$= \mathbb{P}\Big(\frac{S_{400} - 400\cdot 0.02}{400\cdot 0.02\cdot 0.98} \leq \underbrace{\frac{3.5 - 400\cdot 0.02}{400\cdot 0.02\cdot 0.98}}_{=-1.61}\Big) \simeq \Phi(-1.61) = 1 - \Phi(1.61) = 0.0537$$