

Soluzioni Primo esonero

S 1. Numerando consecutivamente i vertici del pentagono da 1 a 5, possiamo ad esempio scegliere

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 5\}, \text{ con } i \neq j \text{ e senza tener conto dell'ordine}\}$$

Ovviamente, scegliamo $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}$ la probabilità uniforme (i vertici sono scelti a caso), così che $\mathbb{P}(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$, per ogni $A \subset \Omega$. Ora, $\text{card}(\Omega) = C_2^5 = \binom{5}{2} = 10$.

Inoltre, l'evento $A = \{i \text{ due vertici appartengono allo stesso lato}\}$ equivale all'insieme delle coppie (i, j) formate da due numeri consecutivi oppure la coppia $(1, 5)$, cioè

$$A = \{(i, j) \in \Omega : i = 1, \dots, 4 \text{ e } j = i + 1 \text{ oppure } i = 1 \text{ e } j = 5\}.$$

È immediato verificare che $\text{card}(A) = 5$, dunque $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

S 2. a) Osserviamo che X può assumere i valori 2, 3, 4, e si ha (usando la legge ipergeometrica):

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(0 \text{ nere e } 2 \text{ rosse da } A) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(1 \text{ nera e } 1 \text{ rossa da } A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(2 \text{ nere e } 0 \text{ rosse da } A) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

Dunque,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 2, 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Osserviamo che $\{\text{aver estratto da } A \text{ una pallina nera ed una rossa}\} = \{X = 3\}$, dunque si chiede $\mathbb{P}(X = 3 | N_1)$, essendo $N_1 = \{\text{da } B \text{ viene estratta una pallina nera}\}$. Dunque,

$$\mathbb{P}(X = 3 | N_1) = \frac{\mathbb{P}(N_1 | X = 3)\mathbb{P}(X = 3)}{\mathbb{P}(N_1)}.$$

Ora,

$$\mathbb{P}(N_1) = \mathbb{P}(N_1 | X = 2)\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(N_1 | X = 3)\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(N_1 | X = 4)\mathbb{P}(X = 4) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Quindi,

$$\mathbb{P}(X = 3 | N_1) = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

c) Procedendo come nel punto 2., si ha immediatamente che $\mathbb{P}(N_i) = 1/2$ per ogni i . Ora, se $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_i \cap N_j) &= \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \\ \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 | X = 2)\mathbb{P}(X = 2) &+ \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 | X = 3)\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 | X = 4)\mathbb{P}(X = 4) = \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Allora, $\mathbb{P}(N_i \cap N_j) = \frac{7}{27} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(N_i)\mathbb{P}(N_j)$: gli eventi $N_1, N_2, \dots$ non sono a due a due indipendenti quindi non sono indipendenti.

S 3. a) Perché p_X sia una densità discreta, dev'essere $\sum_x p_X(x) = 1$, quindi

$$1 = \sum_{x=1}^{+\infty} c(1-p)^{x-1}p + \sum_{x=-\infty}^1 c(1-p)^{-x-1}p = 2pc \sum_{x=1}^{+\infty} (1-p)^{x-1} = 2pc \frac{1}{1-(1-p)} = 2c$$

da cui si ottiene $c = 1/2$.

b) Dobbiamo calcolare $p_{Z,W}(z, w) = \mathbb{P}(Z = z, W = w)$, con $z = \pm 1$ e $w = 1, 2, \dots$ (per ogni altro valore di z e w , si ha evidentemente $p_{Z,W}(z, w) = 0$). Ora, se $z = 1$,

$$\begin{aligned} p_{Z,W}(1, w) &= \mathbb{P}(Z = 1, W = w) = \mathbb{P}(X \geq 0, |X| = w) = \\ &= \mathbb{P}(X \geq 0, X = w) = \mathbb{P}(X = w) = \frac{1}{2}p(1-p)^{w-1}. \end{aligned}$$

Analogamente, se $z = -1$,

$$\begin{aligned} p_{Z,W}(-1, w) &= \mathbb{P}(Z = -1, W = w) = \mathbb{P}(X < 0, |X| = w) = \\ &= \mathbb{P}(X < 0, -X = w) = \mathbb{P}(X = -w) = \frac{1}{2}p(1-p)^{w-1}. \end{aligned}$$

Dunque, riassumendo si ha

$$p_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} \frac{1}{2}p(1-p)^{w-1} & \text{se } z = \pm 1 \text{ e } w = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Z e W sono indipendenti, perché $p_{Z,W}(z, w) = g_1(z)g_2(w)$ dove

$$g_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } z = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(w) = \begin{cases} (1-p)^{w-1}p & \text{se } w = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo g_1 e g_2 due densità (in particolare, g_2 è la densità del primo successo in prove bernoulliane), si ha immediatamente che $p_Z(z) = g_1(z)$ e $p_W(w) = g_2(w)$.

c) Poiché, come abbiamo detto, Z e W sono indipendenti, si ha $p_{W|Z}(w|z) = p_W(w)$. Invece, fissato $z = \pm 1$,

$$p_{X|Z}(x|z) = \frac{p_{XZ}(x, z)}{p_Z(z)}, \quad \text{al variare di } x.$$

Ora, essendo $p_{XZ}(x, z) = \mathbb{P}(X = x, Z = z)$, per $z = +1$ si ha

$$p_{XZ}(x, 1) = \mathbb{P}(X = x, X \geq 0) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = (1-p)^{x-1}p & \text{se } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e analogamente, se $z = -1$,

$$p_{XZ}(x, -1) = \mathbb{P}(X = x, X < 0) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) = (1-p)^{-x-1}p & \text{se } x = -1, -2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora, riassumendo, fissato $z = \pm 1$, si ha:

$$p_{X|Z}(x|z) = \begin{cases} (1-p)^{zx-1}p & \text{se } x = z, 2z, 3z \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

S 4. È noto che il limite esiste ed è una legge di tipo Poisson, con parametro λ (cfr appunti o libro di testo).