Soluzioni Esercitazione IX

S 1. Se X denota il contenuto effettivo di caffè, si ha $X \sim \mathrm{N}(250, \sigma^2)$. Si sa che $\mathbb{P}(X > 252) = 0.05$, dunque

$$0.05 = 1 - \mathbb{P}(X \leq 252) = 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{X - 250}{\sigma} \leq \frac{252 - 250}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{2}{\sigma}\Big)$$

perché $(X - 250)/\sigma \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Dunque,

$$\frac{2}{\sigma} = \phi_{0.95} = 1.64, \quad \text{cioè} \quad \sigma = \frac{2}{1.64} = 1.22$$

Infine, la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}(X < 245) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - 250}{1.22} \leq \underbrace{\frac{245 - 250}{1.22}}_{=-4.1}\Big) = \Phi(-4.1) = 1 - \Phi(4.1) \simeq 0.$$

S 2. Poiché si suppone che X_A e X_B sono indipendenti, $Z = X_B - 2X_A \sim \mathrm{N}(2\mu - 2\mu, \sigma^2 + 4\sigma^2) = \mathrm{N}(0, 5\sigma^2)$. Si chiede il massimo valore di σ^2 affinché $\mathbb{P}(|Z| < 0.01) \geq 0.99$. Poiché $Z/\sqrt{5\sigma^2} \sim \mathrm{N}(0, 1)$, dev'essere

$$\begin{aligned}
0.99 \leq \mathbb{P}(|Z| < 0.01) &= \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{Z}{\sqrt{5\sigma^2}}\Big| < \underbrace{\frac{0.01}{\sqrt{5\sigma^2}}}_{4.5\cdot 10^{-3}/\sigma}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{Z}{\sqrt{5\sigma^2}} < 4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma\Big) - \mathbb{P}\Big(\frac{Z}{\sqrt{5\sigma^2}} < -4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma\Big) \\
&= \Phi(4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma) - \Phi(-4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma) = \Phi(4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma) - 1 + \Phi(4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma) \\
&= 2\Phi(4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma) - 1
\end{aligned}$$

da cui si ottiene $\Phi(4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma) \geq (1 + 0.99)/2 = 0.995 = \Phi(2.58)$.Dunqe, $4.5 \cdot 10^{-3}/\sigma \geq 2.58$, cioè $\sigma \leq 4.5 \cdot 10^{-3}/2.58 = 1.74 \cdot 10^{-3}$. Il massimo valore di σ^2 richiesto è quindi $\sigma^2 = 1.74^2 \cdot 10^{-6} = 3.06 \cdot 10^{-6}$.

S 3. Indichiamo con S_n il numero di teste uscite su n lanci e con F_n la sua f.d.: l'approssimazione gaussiana con correzione dà

$$F_n(x) \simeq \Phi\Big(\frac{x + 0.5 - n\,p}{\sqrt{n\,p(1 - p)}}\Big) \tag{1}$$

dove, al solito, Φ denota la f.d. di una gaussiana standard e p la probabilità che in un singolo lancio esca testa. Ricordiamo inoltre che, per $\xi > 0$,

$$\Phi(-\xi) = 1 - \Phi(\xi).$$

a) Qui $p = \frac{1}{2}$ e $n = 1000$. Si chiede $\mathbb{P}(490 \leq S_{1000} \leq 510)$. Da (**??**),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(490 \leq S_{1000} \leq 520) = F_{1000}(520) - F_{1000}(489) &\simeq \Phi\Big(\frac{520.5 - 500}{\sqrt{250}}\Big) - \Phi\Big(\frac{489.5 - 500}{\sqrt{250}}\Big) \\
&= \Phi\Big(1.2965\Big) - \Phi\Big(-0.6641\Big) = \Phi\Big(1.2965\Big) - 1 + \Phi\Big(0.6641\Big) \\
&\simeq 0.90147 - 1 + 0.7454 = 0.64687,
\end{aligned}$$

quindi $\mathbb{P}(490 \leq S_{1000} \leq 520) \simeq 0.64687$.

b) Qui $p = \frac{1}{2}$ e $n = 1000$. Si chiede k affinché $\mathbb{P}(490 \leq S_{1000} \leq k) = 0.7$. Da (**??**),

$$0.7 = \mathbb{P}(490 \leq S_{1000} \leq k) = F_{1000}(k) - F_{1000}(489) \simeq \Phi\Big(\frac{k + 0.5 - 500}{\sqrt{250}}\Big) - \Phi\Big(\frac{489.5 - 500}{\sqrt{250}}\Big).$$

Allora

$$\begin{aligned}
\Phi\Big(\frac{k + 0.5 - 500}{\sqrt{250}}\Big) &\simeq 0.7 + \Phi\Big(\frac{489.5 - 500}{\sqrt{250}}\Big) = 0.7 + \Phi\Big(-0.6641\Big) \\
&= 0.7 + 1 - \Phi\Big(0.6641\Big) \simeq 0.9546.
\end{aligned}$$

Ora, uno sguardo alle tavole dà $\Phi^{-1}(0.9546) \simeq 1.7$, quindi

$$\frac{k + 0.5 - 500}{\sqrt{250}} \simeq 1.7, \qquad \text{cioè} \qquad k \simeq 499.5 + 1.7 \cdot \sqrt{250} = 526.3794.$$

c) Qui $p = \frac{1}{2}$. Si chiede $n > 800$ affinché $\mathbb{P}(S_n > 400) > 0.6$. Da (**??**),

$$0.6 < \mathbb{P}(S_n > 400) = 1 - F_n(400) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{400.5 - n/2}{\sqrt{n}/2}\Big).$$

Basta allora cercare n affinché

$$\Phi\Big(\frac{801 - n}{\sqrt{n}}\Big) < 0.4$$

Ora, poiché $n > 800$, $\frac{801-n}{\sqrt{n}} \leq 0$, quindi

$$\Phi\Big(\frac{801 - n}{\sqrt{n}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{n - 801}{\sqrt{n}}\Big) < 0.4$$

cioè

$$\Phi\Big(\frac{n - 801}{\sqrt{n}}\Big) > 0.6.$$

Ma $\Phi^{-1}(0.6) \simeq 0.26$ e poiché Φ è crescente possiamo scrivere

$$\frac{n - 801}{\sqrt{n}} > 0.26.$$

Risolvendo la disequazione, otteniamo $n > 808.5$, quindi basta tirare la moneta 809 volte.

d1) Qui $n = 1000$ e si cerca p affinché $\mathbb{P}(S_n < 200) > 0.5$. Da (**??**),

$$0.5 < \mathbb{P}(S_{1000} < 200) = \mathbb{P}(S_{1000} \le 201) = F_{1000}(201) \simeq \Phi\Big(\frac{201.5 - 1000\,p}{\sqrt{1000\,p(1-p)}}\Big).$$

Ma allora $201.5 - 1000\,p > 0$, cioè $p < 0.2015$.

d2) Se invece si avesse $\mathbb{P}(S_n < 200) < 0.2$, allora

$$0.2 > \mathbb{P}(S_{1000} < 200) = \mathbb{P}(S_{1000} \le 201) = F_{1000}(201) \simeq \Phi\Big(\frac{201.5 - 1000\,p}{\sqrt{1000\,p(1-p)}}\Big).$$

Poiché $\Phi^{-1}(0.2) = -\Phi^{-1}(1-0.2) = -\Phi^{-1}(0.8) \simeq -0.84$, basta che

$$\frac{201.5 - 1000\,p}{\sqrt{1000\,p(1-p)}} < -0.84$$

cioè $1000\,p - 201.5 > 0.84\,\sqrt{1000\,p(1-p)}$. Quindi, $1000\,p - 201.5 > 0$, cioè $p > 0.2105$ e

$$10^6(p - 0.2015)^2 > (0.84)^2 \cdot 10^3 \cdot p(1-p).$$

Risolvendo, si ottiene $p < 0.19106$ oppure $p > 0.21236$. Poiché p dev'essere maggiore di 0.2015, ne segue che $p > 0.21236$.

S 4. Se $X_i = 1_{A_i}$, con $A_i = \{$l'i-esimo intervistato dichiara di aver votato per il partito $A\}$, possiamo supporre che le X_i siano i.i.d., di legge $\mathrm{B}(1, 0.18)$, dunque $S_{1000} = X_1 + \ldots + X_{1000}$ dà il numero degli intervistati nel campione che dichiarano di aver votato per A ed è una v.a. di legge $\mathrm{B}(1000, 0.18)$. La probabilità richiesta è quindi

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{1000}S_{1000} - 0.18\Big| \ge 1\Big).$$

Si ha,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{1000}S_{1000} - 0.18\Big| \ge 0.01\Big) = \mathbb{P}(|S_{1000} - 180| \ge 10) = \mathbb{P}(S_{1000} \le 170) + \mathbb{P}(S_{1000} \ge 190)$$

Ora, usando l'approssimazione normale con correzione, e ricordando la notazione $S_n^* = (S_n - n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$, otteniamo:

$$\mathbb{P}(S_{1000} \le 170) = \mathbb{P}(S_{1000} \le 170 + 0.5)$$
$$= \mathbb{P}\Big(S^*_{1000} \le \underbrace{\frac{170.5 - 1000 \cdot 0.18}{\sqrt{1000 \cdot 0.18(1-0.18)}}}_{=-0.782}\Big) \simeq \Phi(-0.782) = 1 - \Phi(0.782) = 0.2177.$$

Analogamente,

$$\mathbb{P}(S_{1000} \ge 190) = 1 - \mathbb{P}(S_{1000} < 190) = 1 - \mathbb{P}(S_{1000} \le 189) = 1 - \mathbb{P}(S_{1000} \le 189 + 0.5)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big(S^*_{1000} \le \underbrace{\frac{189.5 - 1000 \cdot 0.18}{\sqrt{1000 \cdot 0.18(1-0.18)}}}_{=0.782}\Big) \simeq 1 - \Phi(0.782) = 0.2177.$$

Dunque, la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{1000}S_{1000} - 0.18\Big| \ge 1\Big) \simeq 0.4354,$$

cioè il 43%!!!

Se il campione è formato da 10000 individui, si procede esattamente allo stesso modo e si ottiene

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{10000}S_{10000} - 0.18\Big| \ge 1\Big) \simeq 0.01,$$

cioè circa l'1% (!!).

S 5. a) Ricordando che la densità di una v.a. U uniforme su $[0,1]$ è $p_U(u) = 1_{0 \le u \le 1}$, si ha

$$\mathbb{E}(f(U)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p_U(u)\,du = \int_0^1 f(u)\,du,$$
$$\mathbb{E}(f^2(U)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u)p_U(u)\,du = \int_0^1 f^2(u)\,du.$$

b) Si chiede di stimare n affinché

$$\mathbb{P}(|\hat\alpha_n - \alpha| < 0.1) > 0.99 \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathbb{P}(|\hat\alpha_n - \alpha| \ge 0.1) < 0.01.$$

Useremo la seconda disuguaglianza.

Osserviamo che le v.a. $X_k = f(U_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sono i.i.d., di media $\mathbb{E}(f(U)) = \alpha$ e varianza $\mathrm{Var}(f(U)) = \sigma_f^2$. Dunque, usando la stima della LGN, o meglio la disuguaglianza di Chebycev, si ha

$$\mathbb{P}(|\hat\alpha_n - \alpha| \ge 0.1) \le \frac{\sigma_f^2}{n\,(0.1)^2}.$$

Normalmente basta imporre che $\frac{\sigma_f^2}{n\,(0.1)^2} < 0.01$, il che darebbe $n > \sigma_f^2 \cdot 10^4 \cdot 10^2$. Il problema è che qui

$$\sigma_f^2 = \mathrm{Var}(f(U)) = \mathbb{E}(f^2(U)) - \mathbb{E}^2(f(U)) = \int_0^1 f^2(u)du - \Big(\int_0^1 f(u)du\Big)^2,$$

dunque σ_f^2 non si conosce. Però, usando il fatto che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [0,1]$, si può considerare la stima

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 \underbrace{f^2(u)}_{\le M^2\,\forall u}\,du - \Big(\int_0^1 \underbrace{f(u)}_{\ge m\,\forall u}\,du\Big)^2 \le M^2 - m^2.$$

Dunque,

$$\mathbb{P}(|\hat\alpha_n - \alpha| \ge 0.1) \le \frac{\sigma_f^2}{n\,(0.1)^2} \le \frac{M^2 - m^2}{n\,(0.1)^2}$$

e imponendo $\frac{M^2-m^2}{n\,(0.1)^2} < 0.01$, si ottiene $n > (M^2 - m^2) \cdot 10^6$.