Soluzioni Esercitazione VII

S 1. a) Dobbiamo calcolare $p_{Z,W}(z,w) = \mathbb{P}(Z = z, W = w)$, con $z = \pm 1$ e $w = 1, 2, \dots$ (per ogni altro valore di z e w, si ha evidentemente $p_{Z,W}(z,w) = 0$). Ora, se $z = 1$,

$$p_{Z,W}(1,w) = \mathbb{P}(Z = 1, W = w) = \mathbb{P}(X \geq 0, |X| = w) =$$
$$= \mathbb{P}(X \geq 0, X = w) = \mathbb{P}(X = w) = \frac{1}{2}\, p\,(1-p)^{w-1}.$$

Analogamente, se $z = -1$,

$$p_{Z,W}(-1,w) = \mathbb{P}(Z = -1, W = w) = \mathbb{P}(X < 0, |X| = w) =$$
$$= \mathbb{P}(X < 0, -X = w) = \mathbb{P}(X = -w) = \frac{1}{2}\, p\,(1-p)^{w-1}.$$

Dunque, riassumendo si ha

$$p_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, p\,(1-p)^{w-1} & \text{se } z = \pm 1 \text{ e } w = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Z e W sono indipendenti, perché $p_{Z,W}(z,w) = g_1(z) g_2(w)$ dove

$$g_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } z = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(w) = \begin{cases} (1-p)^{w-1} p & \text{se } w = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo g_1 e g_2 due densità (in particolare, g_2 è la densità del primo successo in prove bernoulliane), si ha immediatamente che $p_Z(z) = g_1(z)$ e $p_W(w) = g_2(w)$.

b) Poiché, come abbiamo detto, Z e W sono indipendenti, si ha $p_{W\,|\,Z}(w\,|\,z) = p_W(w)$. Dunque, $\mathbb{E}(W\,|\,Z = z) = \sum_w w p_{W\,|\,Z}(w\,|\,z) = \sum_w w p_W(w) = \mathbb{E}(W) = 1/p$.

c) Occorre $\mathrm{Cov}(X, Z)$. Per evidenti ragioni di simmetria, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) = 0$; inoltre,

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X(1_{\{X \geq 0\}} - 1_{\{X < 0\}})) = \mathbb{E}(|X|) = \sum_x |x| p_X(x).$$

Ora, poiché $x \mapsto |x| p_X(x)$ è una funzione pari[1] si ha

$$\mathbb{E}(XZ) = \sum_x |x| p_X(x) = 2 \sum_{x=1}^{+\infty} x p_X(x) = \frac{1}{p}$$

(perché $2 \sum_{x=1}^{+\infty} x p_x(x) = \mathbb{E}(T)$, con T istante di primo successo in prove bernoulliane con probabilità di successo $= p$). Dunque, $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}(XZ) = 1/p > 0$, da cui segue che tra X e Z c'è dipendenza positiva. Per scrivere l'equzione dlla retta di regressione di Z rispetto a X, occorre calcolare $\mathrm{Var}(X)$: ricordando che $\mathbb{E}(X) = 0$, si ha

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \sum_x x^2 p_X(x) = 2 \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p_X(x),$$

[1] Ricordiamo che $g(x)$ è pari se $g(x) = g(-x)$.

dove abbiamo usato il fatto che $x \mapsto x^2 p_X(x)$ è pari. Ora, detta T la v.a. istante di primo successo in prove bernoulliane con prob. successo $= p$, si ha

$$2\sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p_X(x) = \mathbb{E}(T^2) = \mathrm{Var}(T) + \mathbb{E}^2(T) = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Dunque, nel piano (x,z) la retta di regressione ha equazione

$$z = \frac{p}{2-p}\, x.$$

d) $\mathbb{E}(X \,|\, Z=-1) = \sum_x x p_{X\,|\,Z}(x\,|-1)$, essendo $p_{X\,|\,Z}(x\,|-1) = p_{X,Z}(x,-1)/p_Z(-1) = 2\,p_{X,Z}(x,-1)$. Ora,

$$\begin{aligned} p_{X,Z}(x,-1) &= |P(X=x, Z=-1) = \\ = \mathbb{P}(X=x, X<0) &= \begin{cases} \mathbb{P}(X=x) = p_X(x) & \text{se } x=-1,-2,-3,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi,

$$\mathbb{E}(X\,|\,Z=-1) = \sum_{x=-\infty}^{-1} xp(1-p)^{-x-1} = -\sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = -\mathbb{E}(T) = -\frac{1}{p}$$

dove T denota la v.a. istante di primo successo come sopra.

S 2. a) Poiché $X_1,\dots,X_6$ sono indipendenti, segue che anche le tre v.a. Y,Z,W sono indipendenti. Quindi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(T,U) &= \mathrm{Cov}(Y+Z, Z+W) = \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W) + \mathrm{Cov}(Z,Z) + \mathrm{Cov}(Z,W) = \\ &= 0+0+\mathrm{Var}(Z)+0 = \mathrm{Var}(X_3+X_4) = \mathrm{Var}(X_3)+\mathrm{Var}(X_4) = 2p(1-p), \end{aligned}$$

b) $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_1+\cdots+X_4) = \mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_4) = 4p$. Inoltre, poiché le X_i sono indipendenti, $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_4) = \mathrm{Var}(X_1)+\cdots+\mathrm{Var}(X_4) = 4p(1-p)$.

c) Si ha: $\mathbb{E}(2T+1) = 2\mathbb{E}(T)+1 = 8p+1$ e $\mathrm{Var}(2T+1) = \mathrm{Var}(2T) = 4\mathrm{Var}(T) = 16p(1-p)$.

d) Si ha: $\mathrm{Cov}(2T+1, 3U) = 6\mathrm{Cov}(T,U) + 3\mathrm{Cov}(1,U) = 4p(1-p)$ perché si ha sempre $\mathrm{Cov}(c,X)=0$ quando c è costante (e X è qui una v.a. qualsiasi).

S 3. Ricordiamo che perché f sia una densità dev'essere $f\geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Inoltre, osserviamo che $1-x^2\geq 0$ per $x\in[-1,1]$ e $1-x^2\leq 0$ per $x\leq -1$ e $x\geq 1$.

1. Se $c\geq 0$, $f_1\geq 0$ per ogni x: f_1 è una densità se si sceglie c tale che $c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1$, cioè $c=3/4$.

2. Comunque si scelga c, f_2 non è a segno costante (se, ad esempio, $c>0$, $f_2(0)>0$ e $f_2(3/2)<0$), dunque non esiste c tale che f_2 è una densità.

3. Osserviamo che per $x \in (2,3)$, la funzione $x \mapsto 1 - x^2$ è sempre negativa, dunque preso $c < 0$ si ottiene $f_3(x) \geq 0$ per ogni x. Infine,

$$1 = c \int_2^3 (1 - x^2) dx = -\frac{2}{3} c, \quad \text{da cui si ottiene } c = -\frac{3}{2}.$$

Dunque, $f_3(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1) 1_{\{x \in (2,3)\}}$ è una densità.