Soluzioni Esercitazione VI

S 1. a) Sappiamo¹ che se X e Y hanno momento k -esimo allora anche $X + Y$ ha momento di ordine k , così come αX e βY per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quindi L_d^2 è uno spazio vettoriale.

b) Occorre verificare che

1. (simmetria) per ogni $X, Y \in L_d^2$, $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$: ovvio;
2. (linearità) per ogni $X_1, X_2, Y \in L_d^2$, $\langle X_1 + X_2, Y \rangle = \langle X_1, Y \rangle + \langle X_2, Y \rangle$: $\langle X_1 + X_2, Y \rangle = \mathbb{E}[(X_1 + X_2)Y] = \mathbb{E}(X_1Y) + \mathbb{E}(X_2Y) = \langle X_1, Y \rangle + \langle X_2, Y \rangle$;
3. (omogeneità) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X \in L_d^2$, $\langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle$: $\langle \lambda X, Y \rangle = \mathbb{E}(\lambda X Y) = \lambda \mathbb{E}(XY) = \lambda \langle X, Y \rangle$;
4. (positività e non degenerazione) per ogni $X \in L_d^2$, $\langle X, X \rangle \geq 0$ e $\langle X, X \rangle = 0$ se e solo se $X = 0$: $\langle X, X \rangle = \mathbb{E}(X^2) \geq 0$ e se $X = 0$ ovviamente $\langle X, X \rangle = 0$; inoltre, se $\langle X, X \rangle = \mathbb{E}(X^2) = 0$ allora

$$\sum_{x \in E_X} x^2 p_X(x) = 0.$$

La somma su scritta è a termini non negativi, quindi il risultato è nullo se e solo se tutti i termini della somma sono nulli: l'unico elemento in E_X può essere solo lo 0, cioè $X = 0$.

Le 1.-4. provano che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su L_d^2 . È ben noto allora che $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ definisce una norma su L_d^2 .

S 2. La verifica delle a1)- a4) è immediata conseguenza delle proprietà 1.-4. valide per il prodotto scalare definito nell'esercizio 1: basta infatti ricordare che, per ogni $X, Y \in L_d^2$,

$$\text{Cov}(X, Y) = \langle X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) \rangle = \langle TX, TY \rangle$$

dove $T : X \in L_d^2 \mapsto TX = X - \mathbb{E}(X) \in L_d^2$ è un operatore lineare di L_d^2 .

Per **a5)**, basta ricordare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, le v.a. X e $Y = \alpha$ sono indipendenti, quindi $\text{Cov}(X, \alpha) = 0$. Oppure, per verifica diretta, $\text{Cov}(X, \alpha) = \mathbb{E}(\alpha X) - \mathbb{E}(\alpha)\mathbb{E}(X) = \alpha \mathbb{E}(X) - \alpha \mathbb{E}(X) = 0$.

L'applicazione Cov su $L_d^2 \times L_d^2$ non definisce un prodotto scalare perché salta la non degenerazione: se $\text{Cov}(X, X) = 0$ allora $X = \alpha$ e non è detto che $\alpha = 0$.

S 3. a) Ovviamente, indipendenza implica covarianza nulla. Supponiamo ora che $\text{Cov}(X, Y) = 0$:

$$0 = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1),$$

cioè $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$. Allora

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$$

¹La verifica segue dalla validità della disuguaglianza: $|x + y|^k \leq 2^{k-1}(|x|^k + |y|^k)$, per ogni intero $k \geq 1$ e $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(Y = 1) \left(1 - \mathbb{P}(X = 1) \right) = \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 1), \\
\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 1) \\
&= \mathbb{P}(X = 0) \left(1 - \mathbb{P}(Y = 1) \right) = \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 0), \\
\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 1) \\
&= \mathbb{P}(X = 1) \left(1 - \mathbb{P}(Y = 1) \right) = \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 0),
\end{aligned}$$

da cui segue che X e Y sono indipendenti.

Supponiamo ora che X e Y possano assumere solo due valori $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ rispettivamente e che $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Consideriamo le v.a.

$$U = \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad V = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

U e V sono bernoulliane di parametri, rispettivamente, $p = p_X(x_2)$ e $\hat{p} = p_Y(y_2)$. Inoltre,

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}\left(\frac{X - x_1}{x_2 - x_1}, \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}\right) = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \text{Cov}(X, Y) = 0,$$

quindi, per **a)**, U e V sono indipendenti. Infine, poiché

$$X = x_1 + (x_2 - x_1)U \quad \text{e} \quad Y = y_1 + (y_2 - y_1)V,$$

segue che anche X e Y sono indipendenti.

b) Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in E_X} x p_X(x) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = 0 \\
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y \in E_Y} y p_Y(y) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 0 \\
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x \in E_X} \sum_{y \in E_Y} x y p_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} = 0
\end{aligned}$$

da cui segue che $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Inoltre, ad esempio, $\mathbb{P}(X = -2, Y = -1) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}(X = -2) \mathbb{P}(Y = -1)$, dunque X e Y non sono indipendenti. Abbiamo quindi trovato un controesempio alla (evidentemente falsa, in generale) implicazione

covarianza nulla $\implies$ indipendenza.

S 4. Posto $y = g(x)$, risolvendo rispetto a x (il che si può fare perché $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$) si ottiene:

$$x = \frac{\text{Var}(X)}{\text{Cov}(X, Y)} \left(y - \mathbb{E}(Y) \right) + \mathbb{E}(X),$$

e quindi $\psi(y) = \frac{\text{Var}(X)}{\text{Cov}(X,Y)}(y - \mathbb{E}(Y)) + \mathbb{E}(X)$. Ora, l'equazione della retta di regressione di X rispetto a Y è

$$x = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(y - \mathbb{E}(Y)) + \mathbb{E}(X).$$

Allora $x = \psi(y)$ è la retta di regressione richiesta se e solo se

$$\frac{\text{Var}(X)}{\text{Cov}(X, Y)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

che equivale a

$$|\text{Cov}(X, Y)| = \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}.$$

Quindi $x = \psi(y) \equiv g^{-1}(y)$ è l'equazione della retta di regressione richiesta se e solo se vale il caso limite della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz².

S 5. a) Usando le proprietà tipiche della covarianza, si ha

$$\text{Cov}(X, Z^{\alpha,\beta}) = \text{Cov}(X, \alpha X + \beta Y) = \alpha \text{Cov}(X, X) + \beta \text{Cov}(X, Y) = \alpha \text{Var}(X)$$

perché X e Y sono indipendenti, quindi non correlate: $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Ora, basta ricordare che la varianza di una $\text{Po}(\lambda)$ è $\lambda (> 0)$:

$$\text{Cov}(X, Z^{\alpha,\beta}) = \alpha \lambda \text{ quindi: } \begin{cases} \text{se } \alpha > 0 \text{ allora c'è dipendenza } \mathbf{positiva} \\ \text{se } \alpha < 0 \text{ allora c'è dipendenza } \mathbf{negativa} \\ \text{se } \alpha = 0 \text{ allora c'è dipendenza } \mathbf{nulla} \end{cases}$$

Si noti, in particolare, che il tipo di dipendenza **non** dipende da β . Inoltre, se $\alpha = 0$ allora $Z^{\alpha,\beta} = Z^{0,\beta} = \beta Y$, quindi X e $Z^{0,\beta}$ non sono solo incorrelate ma anche indipendenti.

b) L'equazione della retta di regressione sul piano (x, z) è

$$z = \frac{\text{Cov}(X, Z^{\alpha,\beta})}{\text{Var}(X)}(x - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Z^{\alpha,\beta}).$$

Poiché $\text{Cov}(X, Z^{\alpha,\beta}) = \alpha \lambda$, $\mathbb{E}(X) = \lambda = \mathbb{E}(Y)$ e $\mathbb{E}(Z^{\alpha,\beta}) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y) = (\alpha + \beta)\lambda$, la retta di regressione qui diviene $z = \alpha x + \beta \lambda$.

S 6. a) Calcoliamo dapprima le quantità che servono per il calcolo dei coefficienti della retta di regressione:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = 0 \\ \mathbb{E}(V) &= \mathbb{E}(X_1 X_3) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_3) = 0 \\ \text{Var}(U) &= \mathbb{E}(U^2) = \mathbb{E}(X_1^2 X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = 1 \\ \text{Cov}(U, V) &= \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(X_1^2 X_2 X_3) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_3) = 0 \end{aligned}$$

Dunque, nel piano (u, v) la retta di regressione ha equazione $v = 0$.

² $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}$, si veda la nota 1

b) U e V hanno covarianza nulla e possono assumere due solo valori: in virtù dell'Esercizio 3 possiamo immediatamente dedurre l'indipendenza.

c) Si ha, per $u, v \in \{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= \mathbb{P}(U = u, V = v) = \mathbb{P}(X_1 X_2 = u, X_1 X_3 = v) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = u, X_3 = v, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = -u, X_3 = -v, X_1 = -1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = u)\mathbb{P}(X_3 = v)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = -u)\mathbb{P}(X_3 = -v)\mathbb{P}(X_1 = -1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Osserviamo che, di conseguenza, $p_U(-1) = 1/2 = p_U(1)$ e analogamente $p_V(-1) = 1/2 = p_V(1)$. Poiché $p_{U,V} = p_U p_V$, anche da qui segue l'indipendenza.