

Soluzioni Esercitazione IV

S 1. (a) Si ha $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x)$. Inoltre, per $x \in \mathbb{R}$, sia $\underline{\phi}(x) = \sup\{x_k \in E_X; x_k < x\}$. Allora

$$\mathbb{P}(X < x) = \sum_{k: x_k < x} p_X(x) = \sum_{k: x_k \leq \underline{\phi}(x)} p_X(x) = F_X(\underline{\phi}(x)).$$

Ora,

$$F_X(x^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = F_X(\underline{\phi}(x))$$

perché per ogni n grande abbastanza si ha

$$F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \sum_{k: x_k \leq x - 1/n} p_X(x) = \sum_{k: x_k \leq \underline{\phi}(x)} p_X(x) = F_X(\underline{\phi}(x)).$$

Dunque, $\mathbb{P}(X < x) = F_X(x^-)$. Infine, (c), (d), (e), (f) sono vere perché:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X \leq b) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a), \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-), \\ \mathbb{P}(a \leq X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(b^-) - F_X(a^-), \\ \mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b^-) - F_X(a).\end{aligned}$$

S 2. (a) Sia Y_N che Z_N coincidono con X su $(-N, N)$; se $X \notin (-N, N)$, Y_N viene “congelata” in N o in $-N$ mentre Z_N viene “congelata” in 0. Ecco perché si usa il termine “troncamento”.

Detti E_{Y_N} e E_{Z_N} rispettivamente i valori che possono assumere Y_N e Z_N , dev'essere

$$E_{Y_N} = \left(E_X \cap (-N, N)\right) \cup \{-N, N\} \quad E_{Z_N} = \left(E_X \cap (-N, N)\right) \cup \{0\}.$$

Studiamone la distribuzione.

Sia $y \in E_{Y_N}$: se $y \neq \pm N$, allora $\{Y_N = y\} = \{X = y\}$; se invece $y = N$ allora $\{Y_N = N\} = \{X = N\} \cup \{X > N\} = \{X \geq N\}$; analogamente, se $y = -N$ si ha $\{Y_N = -N\} = \{X = -N\} \cup \{X < -N\} = \{X \leq -N\}$. Quindi,

$$p_{Y_N}(y) = \begin{cases} p_X(y) & \text{se } y \in E_X \cap (-N, N), \\ \mathbb{P}(X \geq N) & \text{se } y = N, \\ \mathbb{P}(X \leq -N) & \text{se } y = -N. \end{cases}$$

Per quanto riguarda Z_N , sia $z \in E_{Z_N}$: se $z \neq 0$, allora $\{Z_N = z\} = \{X = z\}$; se invece $z = 0$ allora $\{Z_N = 0\} = \{X = 0\} \cup \{X > N\} \cup \{X < -N\}$. Quindi,

$$p_{Z_N}(z) = \begin{cases} p_X(z) & \text{se } z \in E_X \cap (-N, N), \ z \neq 0, \\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X \geq N) + \mathbb{P}(X \leq -N) & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

(b) Ovviamente sia Y_N che Z_N sono v.a. discrete, che possono assumere un numero finito di valori (anche se la cardinalità di E_X può essere numerabile), quindi la funzione di ripartizione è non decrescente, continua a destra, costante a tratti e salta nei punti che tali v.a. possono assumere, con salto pari alla probabilità che tali punti siano assunti.

Studiamo G_N :

$$\begin{aligned} G_N(y) &= \mathbb{P}(Y_N \leq y) = \mathbb{P}(Y_N \leq y, X < -N) + \mathbb{P}(Y_N \leq y, |X| \leq N) + \mathbb{P}(Y_N \leq y, X > N) \\ &= \mathbb{P}(-N \leq y, X < -N) + \mathbb{P}(X \leq y, |X| \leq N) + \mathbb{P}(N \leq y, X > N) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } y < -N \\ \mathbb{P}(X \leq y) & \text{se } -N \leq y < N \\ 1 & \text{se } y \geq N \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $G_N(y)$ coincide con $\mathbb{P}(X \leq y) = F_X(y)$ per $y \in [-N, N)$, vale 0 quando $y < -N$ e 1 se $y \geq N$. Usando le funzioni indicatrici, possiamo scrivere

$$G_N(y) = F_X(y)1_{\{y \in [-N, N)\}} + 1_{\{y \geq N\}}. \quad (1)$$

Per disegnare G_N , basta disegnare il grafico di F_X su $[-N, N)$, porre poi $G_N \equiv 0$ quando $y < -N$ e $G_N \equiv 1$ se $y \geq N$.

Vediamo H_N :

$$\begin{aligned} H_N(z) &= \mathbb{P}(Z_N \leq z) = \mathbb{P}(Z_N \leq z, X < -N) + \mathbb{P}(Z_N \leq z, |X| \leq N) + \mathbb{P}(Z_N \leq z, X > N) \\ &= \mathbb{P}(0 \leq z, X < -N) + \mathbb{P}(X \leq z, |X| \leq N) + \mathbb{P}(0 \leq z, X > N) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } z < -N \\ \mathbb{P}(X \leq z) & \text{se } -N \leq z < 0 \\ \mathbb{P}(X \leq z) + \mathbb{P}(X > N) & \text{se } 0 \leq z < N \\ 1 & \text{se } z \geq N \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi H_N vale 0 e 1 rispettivamente su $z < -N$ e $z \geq N$; coincide con $\mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z)$ su $[-N, 0)$ e vale $\mathbb{P}(X \leq z) + \mathbb{P}(X > N) = F_X(z) + 1 - F_X(N)$ per $z \in [0, N)$, ovvero

$$\begin{aligned} H_N(z) &= F_X(z)1_{\{z \in [-N, 0)\}} + \left(F_X(z) + 1 - F_X(N)\right)1_{\{z \in [0, N)\}} + 1_{\{z \geq N\}} \\ &= F_X(z)1_{\{z \in [-N, N)\}} + \left(1 - F_X(N)\right)1_{\{z \in [0, N)\}} + 1_{\{z \geq N\}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Per disegnare H_N , basta disegnare il grafico di F_X su $[-N, N)$; porre $H_N \equiv F_X$ per $z \in [-N, 0)$ e traslare F_X di $1 - F_X(N)$ per $z \in [0, N)$ (si noti che se X assume valori più piccoli di N , questa traslazione di fatto non c'è); porre $H_N \equiv 0$ quando $z < -N$ e $H_N \equiv 1$ se $z \geq N$.

(c) Si ha che per $N \rightarrow +\infty$, sia G_N che H_N tendono a coincidere con F_X , ovvero Y_N e Z_N si “schiacciano” su X . Infatti, fissati $y, z \in \mathbb{R}$, esiste un N_0 tale che per ogni $N \geq N_0$ si abbia $y, z \in [-N, N)$. Quindi, da (1) segue che $G_N(y) = F_X(y)$ per ogni $N \geq N_0$ e

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_N(y) = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_X(y) = F_X(y);$$

usando (2), per ogni $N \geq N_0$ si ha $H_N(z) = F_X(z) + 1 - F_X(N)$ e

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} H_N(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (F_X(z) + 1 - F_X(N)) = F_X(z)$$

perché $\lim_{N \rightarrow +\infty} F_X(N) = 1$.

S 3. (a) Perché p_X sia una densità discreta, dev'essere: $p_X \geq 0$ e $p_X > 0$ su un insieme al più numerabile, il che è vero; inoltre, $\sum_x p_X(x) = 1$, che diventa (ricordiamo che $\sum_{n \geq 1} \rho^n = 1/(1 - \rho) - 1$, per ogni $\rho \in [0, 1)$)

$$1 = \sum_x p_X(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c \left(\frac{1}{2}\right)^n + c = 2c + c,$$

quindi $c = 1/3$.

(b) Per quanto visto nell'Es. 2, possiamo dire che Y_N e Z_N assumono entrambe valori in $E = \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$. Dunque, se y e/o z non sono in E ovviamente $p_{Y_N, Z_N}(y, z) = 0$, dove con p_{Y_N, Z_N} denotiamo al solito la densità discreta congiunta di Y_N e Z_N . Se invece $y, z \in E$ si ha

$$\begin{aligned} p_{Y_N, Z_N}(y, z) &= \mathbb{P}(Y_N = y, Z_N = z) = \underbrace{\mathbb{P}(Y_N = y, Z_N = z, |X| \leq N)}_{(a)} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P}(Y_N = y, Z_N = z, X < -N)}_{(b)} + \underbrace{\mathbb{P}(Y_N = y, Z_N = z, X > N)}_{(c)}. \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} (a) &= \mathbb{P}(X = y, X = z, |X| \leq N) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = n) & \text{se } y = z = n \in \{-N, \dots, N\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ (b) &= \mathbb{P}(-N = y, 0 = z, X < -N) = \begin{cases} \mathbb{P}(X < -N) & \text{se } y = -N, z = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ (c) &= \mathbb{P}(N = y, 0 = z, X > N) = \begin{cases} \mathbb{P}(X > N) & \text{se } y = N, z = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Ora, ricordando che $\mathbb{P}(X = n) = p_X(n) = c/2^{|n|}$, che $\mathbb{P}(X < -N) = \sum_{n < -N} p_X(n) = \sum_{n < -N} c/2^{|n|} = \sum_{m > N} c/2^m = c/2^{N+1} \sum_{n \geq 0} (1/2)^n = c/2^N$ e, analogamente, $\mathbb{P}(X > N) = c/2^N$, possiamo scrivere

$$p_{Y_N, Z_N}(y, z) = \begin{cases} \frac{c}{2^{|n|}} & \text{se } y = z = n \in \{-N, \dots, N\} \\ \frac{c}{2^N} & \text{se } (y, z) = (-N, 0) \text{ oppure } (y, z) = (N, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcoliamo ora le due distribuzioni marginali:

$$p_{Y_N}(y) = \sum_z p_{Y_N Z_N}(y, z) \text{ e } p_{Z_N}(z) = \sum_y p_{Y_N Z_N}(y, z)$$

Cominciamo dalla prima. Si ha:

1. se $y \in \{-N+1, \dots, N-1\}$ allora $p_{Y_N}(y) = \sum_z p_{Y_N Z_N}(y, z) = p_{Y_N Z_N}(y, y) = c/2^{|y|}$;
2. se $y = -N$ allora $p_{Y_N}(-N) = \sum_z p_{Y_N Z_N}(-N, z) = p_{Y_N Z_N}(-N, -N) + p_{Y_N Z_N}(-N, 0) = c/2^N + c/2^N = c/2^{N-1}$;
3. se $y = N$ allora $p_{Y_N}(N) = \sum_z p_{Y_N Z_N}(N, z) = p_{Y_N Z_N}(N, N) + p_{Y_N Z_N}(N, 0) = c/2^{N-1}$;
4. per ogni altro valore di y , $p_{Y_N}(y) = 0$.

Dunque,

$$p_{Y_N}(y) = \begin{cases} \frac{c}{2^{|y|}} & \text{se } y \in \{-N+1, \dots, N-1\} \\ \frac{c}{2^{N-1}} & \text{se } y = -N, N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Lavoriamo ora sulla legge di Z_N :

1. se $z \in \{-N+1, \dots, N-1\}$ e $z \neq 0$ allora $p_{Z_N}(z) = \sum_y p_{Y_N Z_N}(y, z) = p_{Y_N Z_N}(z, z) = c/2^{|z|}$;
2. se $z = 0$ allora $p_{Z_N}(0) = \sum_y p_{Y_N Z_N}(y, 0) = p_{Y_N Z_N}(0, 0) + p_{Y_N Z_N}(-N, 0) + p_{Y_N Z_N}(N, 0) = c + c/2^N + c/2^N = c + c/2^{N-1}$;
3. per ogni altro valore di z , $p_{Z_N}(z) = 0$.

Dunque,

$$p_{Z_N}(z) = \begin{cases} \frac{c}{2^{|z|}} & \text{se } z \in \{-N, \dots, N\} \text{ e } z \neq 0 \\ c + \frac{c}{2^{N-1}} & \text{se } z = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A titolo di verifica, provare che p_{Y_N} e p_{Z_N} sono effettivamente due densità di probabilità discrete.

S 4. Per t, u interi ≥ 1 , ovviamente $\mathbb{P}(T = t, U = u) = 0$ se $u < t+1$. Se invece $u \geq t+1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = t, U = u) &= \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_{t-1} = 0, X_t = 1, X_{t+1} = \dots = X_{u-1} = 0, X_u = 1) \\ &= (1-p)^{t-1} \cdot p \cdot (1-p)^{u-t-1} \cdot p = p^2(1-p)^{u-2}. \end{aligned}$$

Quindi, per t, u interi,

$$p_{T,U}(t, u) = \begin{cases} p^2(1-p)^{u-2} & \text{se } u \geq t+1 \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoliamo le distribuzioni marginali. Per $t \geq 1$,

$$p_T(t) = \sum_u p_{T,U}(t, u) = \sum_{u=t+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{u-2} = p^2(1-p)^{t-1} \sum_{u=t+1}^{+\infty} (1-p)^{u-(t+1)}$$

$$= p^2(1-p)^{t-1} \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^{t-1}$$

(come d'altro canto sapevamo già!) e per $u \geq 2$,

$$p_U(u) = \sum_t p_{T,U}(t, u) = \sum_{t=1}^{u-1} p^2(1-p)^{u-2} = (u-1)p^2(1-p)^{u-2}$$