Soluzioni Esercitazione III

S 1. (a) Indichiamo: $D = \{$la moneta scelta è difettosa$\}$, $A = \{$la moneta scelta proviene dalla linea A$\}$, $B = \{$la moneta scelta proviene dalla linea B$\}$.

Si chiede $\mathbb{P}(D)$: usando la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \,|\, A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D \,|\, B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} + \frac{2}{10}\frac{1}{2} = \frac{3}{20}.$$

(b) Sia $T = \{$tirando la moneta scelta, esce testa$\}$. Si chiede $\mathbb{P}(T)$. Useremo la formula di Bayes a partire dalla partizione $D^c = \{$la moneta scelta non è difettosa$\}$, $D \cap A$ e $D \cap B$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) = \ & \mathbb{P}(T \,|\, D^c)\mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(T \,|\, D \cap A)\mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(T \,|\, D \cap B)\mathbb{P}(D \cap B) \\ = \ & \mathbb{P}(T \,|\, D^c)\mathbb{P}(D^c) + \mathbb{P}(T \,|\, D \cap A)\mathbb{P}(D \,|\, A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T \,|\, D \cap B)\mathbb{P}(D \,|\, B)\mathbb{P}(B) \\ = \ & \tfrac{1}{2}\tfrac{17}{20} + \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{10}\tfrac{1}{2} = 0.45625\end{aligned}$$

(c) Sia X = numero di monete difettose in una confezione. Si chiede di confrontare $\mathbb{P}(A \,|\, X = 1)$ e $\mathbb{P}(B \,|\, X = 1)$. Ora, essendo

$$\mathbb{P}(A \,|\, X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \,|\, A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X = 1)} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B \,|\, X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \,|\, B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(X = 1)},$$

con $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$, basta confrontare $\mathbb{P}(X = 1 \,|\, A)$ e $\mathbb{P}(X = 1 \,|\, B)$.

Se denotiamo con X_A e X_B il numero di monete difettose osservate scegliendo 10 monete a caso rispettivamente dalla linea A e dalla linea B, allora $\mathbb{P}(X = 1 \,|\, A) = \mathbb{P}(X_A = 1)$ e $\mathbb{P}(X = 1 \,|\, B) = \mathbb{P}(X_B = 1)$. Ora, se pensiamo "successo"="una moneta presa a caso è difettosa", è immediato che $X_A \sim \mathrm{B}(10, p_A)$ e $X_B \sim \mathrm{B}(10, p_B)$, dove $p_A = \mathbb{P}(D \,|\, A) = 1/10$ e $p_B = \mathbb{P}(D \,|\, B) = 2/10$. La probabilità che una confezione contenga una moneta difettosa è quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_A = 1) &= 10p_A(1 - p_A)^9 \quad && \text{se la confezione proviene dalla linea A} \\ \mathbb{P}(X_B = 1) &= 10p_B(1 - p_B)^9 \quad && \text{se la confezione proviene dalla linea B}\end{aligned}$$

Sostituendo i valori p_A e p_B, otteniamo: $\mathbb{P}(X_A = 1) = 0.3874$ e $\mathbb{P}(X_B = 1) = 0.2684$, dunque è più probabile che la confezione provenga dalla linea A.

S 2. Se "successo"="la moneta è difettosa", si tratta di uno schema successo-insuccesso che si può modellare con la distribuzione ipergeometrica (le prove non sono indipendenti!).

Poniamo $A = \{$si sceglie l'urna A$\}$, $B = \{$si sceglie l'urna B$\}$ e X la v.a. (ipergeometrica) che dà il numero di monete difettose ottenute prendendo 10 monete senza reinserimento da un'urna prefissata. Allora:

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, A) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{10-k}}{\binom{100}{10}}$$

quindi si richiede

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, A) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \,|\, A) = \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} =: p_A.$$

(b) Analogamente ad (a), si ha:

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, B) = \frac{\binom{20}{k}\binom{80}{10-k}}{\binom{100}{10}}$$

e si richiede

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, B) = 1 - \mathbb{P}(X = 0 \,|\, B) = \frac{\binom{20}{0}\binom{80}{10}}{\binom{100}{10}} =: p_B.$$

(c) Usando la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X \geq 1 \,|\, B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}(p_A + p_B).$$

S 3. Per $k \geq 1$, indichiamo con L_k e S_k due v.a. bernoulliane

$$L_k = \begin{cases} 1 & \text{se Luca colpisce il bersaglio al tempo } k \\ 0 & \text{se Luca non colpisce il bersaglio al tempo } k \end{cases}$$

$$S_k = \begin{cases} 1 & \text{se Sara colpisce il bersaglio al tempo } k \\ 0 & \text{se Sara non colpisce il bersaglio al tempo } k \end{cases}$$

È evidente che, per ogni k, le v.a. $L_1, \ldots, L_k, S_1, \ldots, S_k$ sono indipendenti.

(a) Se Luca tira per primo, possiamo porre

$$\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(S_{2k} = 1) = \frac{1}{2} = 1 - \mathbb{P}(S_{2k} = 0),$$
$$\mathbb{P}(L_{2k} = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(L_{2k+1} = 1) = \alpha = 1 - \mathbb{P}(L_{2k+1} = 0).$$

dove k indica genericamente un indice per il quale le quantità su scritte hanno senso. Luca può vincere solo in un istante dispari; calcoliamo dunque la probabilità che vinca in un istante prefissato: fissato $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k+1) = \mathbb{P}(L_1 = S_2 = \cdots = L_{2k-1} = S_{2k} = 0, L_{2k+1} = 1)$$

(con la convenzione $\{L_1 = S_2 = \cdots = L_{2k-1} = S_{2k} = 0\} = \Omega$ se $k = 0$) e usando l'indipendenza

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k+1) &= \Big(\textstyle\prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(L_{2j-1}=0)\mathbb{P}(S_{2j}=0)\Big)\mathbb{P}(L_{2k+1}=1)\\ &= \frac{(1-\alpha)^k\alpha}{2^k}\end{aligned}$$

(con la convenzione $\prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(L_{2j-1}=0)\mathbb{P}(S_{2j}=0) = 1$ se $k=0$). Quindi,

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \sum_k \mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^k}{2^k}\alpha = \frac{2\alpha}{1-\alpha}.$$

Perché Luca e Sara vincano con uguale probabilità, dev'essere[1] $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \frac{1}{2}$ da cui segue che $\alpha = \frac{1}{3}$.

(b) Se è Sara ad iniziare, si procede come in **(a)** tenendo però conto che ora Luca può vincere in un istante pari: qui

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(S_{2k}=0)=1, \quad \mathbb{P}(S_{2k+1}=1) = \frac{1}{2} = 1-\mathbb{P}(S_{2k+1}=0),\\ \mathbb{P}(L_{2k+1}=0)=1, \quad \mathbb{P}(L_{2k}=1) = \alpha = 1-\mathbb{P}(L_{2k}=0).\end{gathered}$$

Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{vince Luca}) &= \sum_k \mathbb{P}(\text{Luca vince al tempo } 2k)\\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(S_1 = L_2 = \cdots = L_{2k-2} = S_{2k-1} = 0, L_{2k}=1)\\ &= \sum_{k\geq 1}\Big(\prod_{j=1}^{k-1}\mathbb{P}(L_{2j-1}=0)\mathbb{P}(S_{2j}=0)\Big)\mathbb{P}(S_{2k-1}=0)\mathbb{P}(L_{2k}=1) = \sum_{k\geq 1}\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{2^{k-1}}\cdot\frac{\alpha}{2}\\ &= \frac{\alpha}{2}\sum_{k\geq 1}\Big(\frac{1-\alpha}{2}\Big)^{k-1} = \frac{\alpha}{1+\alpha}.\end{aligned}$$

[1] Quanto affermato è vero se $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) + \mathbb{P}(\text{vince Sara}) = 1$, ciè se con certezza almeno uno dei due vince. Tale fatto è intuitivamente molto ragionevole, ciò nonostante andrebbe dimostrato. Vediamo come si può fare.

Per calcolare la probabilità che sia Sara a vincere, procediamo in modo del tutto analogo: per $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\text{vince Sara}) = \sum_k \mathbb{P}(\text{Sara vince al tempo } 2k) = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(L_1 = S_2 = \cdots = S_{2k-2} = L_{2k-1} = 0, S_{2k}=1)$$

$$= \sum_{k\geq 1}\Big(\prod_{j=1}^{k-1}\mathbb{P}(L_{2j-1}=0)\mathbb{P}(S_{2j}=0)\Big)\mathbb{P}(L_{2k-1}=0)\mathbb{P}(S_{2k}=1) = \sum_{k\geq 1}\frac{(1-\alpha)^k}{2^k} = \sum_{k\geq 0}\Big(\frac{1-\alpha}{2}\Big)^k - 1 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

e in effetti $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) + \mathbb{P}(\text{vince Sara}) = \frac{2\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 1$

Perché Luca e Sara vincano con uguale probabilità, dev'essere[2] $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \frac{1}{2}$, il che dà $\alpha = 1$: se è Sara a tirare per prima, perché il gioco sia equo necessariamente Luca deve avere una mira ineccepibile!

(c) Se il primo a tirare viene scelto a caso, dev'essere[3]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\text{vince Luca}) &= \mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{Luca tira per primo})\mathbb{P}(\text{Luca tira per primo}) \\ &+\mathbb{P}(\text{vince Luca} \mid \text{Sara tira per prima})\mathbb{P}(\text{Sara tira per prima}) \\ &= \frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{2} = \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}\end{aligned}$$

da cui segue che $\alpha = \frac{1}{2}$.

Presentiamo una soluzione alternativa alle domande **(a)** e **(b)**

(a) Definiamo[4]:

$$L = \{\text{Luca colpisce il bersaglio}\} \quad S = \{\text{Sara colpisce il bersaglio}\}$$

relativi al primo tiro disponibile per Luca e Sara (la prima *manche*). Allora, posto $p_1 = \mathbb{P}(\text{vince Luca})$, si ha:

$$\begin{aligned}p_1 &= \mathbb{P}(\text{vince Luca } |L \cap S)\mathbb{P}(L \cap S) + \mathbb{P}(\text{vince Luca } |L \cap S^c)\mathbb{P}(L \cap S^c) \\ &+\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L^c \cap S)\mathbb{P}(L^c \cap S) + P(\text{vince Luca } |L^c \cap S^c)\mathbb{P}(L^c \cap S^c).\end{aligned}$$

Poiché, per ipotesi, sta a Luca tirare per primo, qualora dovesse colpire il bersaglio egli certamente vincerebbe:

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L \cap S) = P(\text{vince Luca } |L \cap S^c) = 1.$$

Se Luca sbagliasse, la prosecuzione del gioco dipenderebbe dalla mira di Sara. Infatti, se Sara tirasse a segno, allora Luca perderebbe, il che in simboli diventa

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L^c \cap S) = 0.$$

Se invece sbagliasse anche Sara, il gioco ricomincerebbe da capo, quindi

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |L^c \cap S^c) = p_1.$$

Dunque,

$$p_1 = \mathbb{P}(L \cap S) + \mathbb{P}(L \cap S^c) + p_1\mathbb{P}(L^c \cap S^c) = \mathbb{P}(L) + p_1\mathbb{P}(L^c \cap S^c)$$

[2] Ancora una volta, occorrerebbe provare che $\mathbb{P}(\text{vince Luca}) + \mathbb{P}(\text{vince Sara}) = 1$: farlo!

[3] Anche qui andrebbe verificato che almeno uno dei due vince con certezza. Infatti, abbiamo già visto che $\mathbb{P}(\text{almeno uno dei due vince} \mid \text{Luca tira per primo}) = 1 = \mathbb{P}(\text{almeno uno dei due vince} \mid \text{Sara tira per prima})$, quindi $\mathbb{P}(\text{almeno uno dei due vince}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

[4] Attenzione: la notazione è simile ma qui L e S sono **eventi** e non v.a.

e poiché i tiri possono supporsi indipendenti,

$$p_1 = \mathbb{P}(L) + p_1\mathbb{P}(L^c)\mathbb{P}(S^c) = \alpha + p_1\frac{1-\alpha}{2}$$

da cui segue che p_1 è soluzione dell'equazione $p_1 = \alpha + p_1\frac{1-\alpha}{2}$, ovvero $p_1 = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$. Perché vincano con uguale probabilità dev'essere $p_1 = \frac{1}{2}$, dunque $\alpha = \frac{1}{3}$.

(b) Detta p_2 la probabilità richiesta, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}(\text{vince Luca } |S\cap L)\mathbb{P}(S\cap L) + \mathbb{P}(\text{vince Luca } |S\cap L^c)P(S\cap L^c) \\ &+\mathbb{P}(\text{vince Luca } |S^c\cap L)P(S^c\cap L) + P(\text{vince Luca } |S^c\cap L^c)P(S^c\cap L^c). \end{aligned}$$

Procedendo analogamente al punto **(a)** , si ha:

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |S\cap L) = \mathbb{P}(\text{vince Luca } |S\cap L^c) = 0,\ \mathbb{P}(\text{vince Luca } |S^c\cap L) = 1$$

e

$$\mathbb{P}(\text{vince Luca } |S^c\cap L^c) = p_2$$

perché in tal caso il gioco ricomincia da capo. Quindi,

$$p_2 = \mathbb{P}(S^c\cap L) + p_2\mathbb{P}(S^c\cap L^c) = \frac{1}{2}\alpha + p_2\frac{1}{2}(1-\alpha)$$

cosicché p_2 è soluzione dell'equazione $p_2 = \frac{\alpha}{2} + p_2\frac{1-\alpha}{2}$, cioè $p_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, cui occorre imporre la condizione $p_2 = \frac{1}{2}$, che dà $\alpha = 1$.

S 4. Immaginando che le richieste di stampa siano indipendenti, il numero di X di richieste di stampa si può modellare come una v.a. binomiale, di parametri $n = 24$ e $p = 3/5$. La stampante è satura quando $X \geq 21$, che avviene con probabilità

$$p = \mathbb{P}(X \geq 21) = \sum_{k=21}^{24} \binom{24}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{24-k} = 0.0035$$

S 5. Sia X il numero di richieste di quel dato prodotto. Per ipotesi, $X \sim \mathrm{Po}(4)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}.$$

Allora, il numero minimo di quantità da ordinare perché al 90% il negoziante possa soddisfare tutte le richieste è il più piccolo valore di n tale che $\mathbb{P}(X \leq n) \simeq 0.9$. Ora,

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k)$$

e usando la tabella, otteniamo:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\mathbb{P}(X \leq n)$	0.018	0.091	0.238	0.433	0.628	0.784	0.888	0.948	0.978	0.991	...

Quindi, per stare tranquillo basterà ordinare più o meno 6 unità di quel prodotto.