

Soluzioni Esercitazione I

S 1. 1. Poiché $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ e $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, allora $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$, dunque $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

2. Usando 1., si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - (\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

S 2. I due numeri estratti possono vedersi come una coppia $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots, n\}^2$, con caratteristiche diverse a seconda che le estrazioni siano effettuate senza o con rimbussolamento: $\omega_1 \neq \omega_2$ nel primo caso, nessuna restrizione nel secondo (attenzione: si sta tenendo conto dell'ordine!).

Se A denota l'evento i due numeri estratti sono consecutivi, allora, fissato il valore di ω_1 , per ω_2 sono possibili le seguenti scelte:

$$\begin{array}{ll}\text{se } \omega_1 = 1 & \text{allora } \omega_2 = 2 \\ \text{se } \omega_1 = n & \text{allora } \omega_2 = n - 1 \\ \text{se } \omega_1 \in \{2, \dots, n - 1\} & \text{allora } \omega_2 = \omega_1 \pm 1\end{array}$$

Dunque, $|A| = 1 + 1 + 2(n - 2) = 2(n - 1)$.

Per il calcolo di $|\Omega|$, occorre distinguere nei due casi che corrispondono ai due tipi di estrazioni (si noti che tale distinzione diviene superflua per il calcolo di $|A|$!)

1. Senza rimbussolamento: $\omega_1 \neq \omega_2$, dunque

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \neq \omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}\}$$

e $|\Omega| = n(n - 1)$. Quindi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2(n - 1)}{n(n - 1)} = \frac{2}{n}.$$

2. Con rimbussolamento:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}\}$$

e $|\Omega| = n^2$. Quindi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2(n-1)}{n^2}.$$

S 3. Numerando le possibili posizioni in fila, i posti occupati dai due amici possono essere caratterizzati tramite una coppia di numeri interi compresi tra 1 e n . Quindi, una scelta possibile per Ω è:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \text{ t.c. } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ e } \omega_i \in \{1, \dots, n\}\} \equiv \{1, \dots, n\}^2 \setminus \{(i, i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

da cui segue che $|\Omega| = n(n-1)$.

1. Sia A_k l'evento i due amici sono separati da k persone, con $1 \leq k \leq n-2$: occorre contare gli elementi di A_k . Separiamo il problema in due casi: a) $\omega_1 < \omega_2$ e b) $\omega_1 > \omega_2$. Per a), fissato ω_1 , allora necessariamente $\omega_2 = \omega_1 + k + 1$, purché $\omega_1 + k + 1 \leq n$, cioè $\omega_1 \leq n - k - 1$. Dunque, in tal caso, gli elementi di A_k che verificano a) sono $n - k - 1$. Discorso analogo per b) (questa volta va fissato ω_2 e fatto variare ω_1): gli elementi di A_k che verificano b) sono ancora $n - k - 1$. Segue allora che $|A_k| = 2(n - k - 1)$, quindi

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{2(n - k - 1)}{n(n - 1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2.$$

2. Detto B l'evento i due amici sono separati da almeno 2 persone, ovviamente $B = \emptyset$ se $n < 3$, altrimenti:

$$B = \bigcup_{k=2}^{n-2} A_k.$$

Poiché l'unione è disgiunta, si potrebbe calcolare $\mathbb{P}(B)$ sommando i valori di $\mathbb{P}(A_k)$ al variare di $k \in \{2, \dots, n-2\}$. In questo caso, però, è più semplice calcolare $\mathbb{P}(B)$ tramite la probabilità del complementare: $B^c = A_0 \cup A_1$ con $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, dunque

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1) = 1 - \frac{2(n-1)}{n(n-1)} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}.$$

S 4. (a)

a.1 $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$;

a.2 $\mathbb{P}(B|A) = 0.8$;

a.3 $\mathbb{P}(B^c|A^c) = 0.9$;

a.4 $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.05$;

a.5 $\mathbb{P}(A^c|B^c) = 9/11$.

(b) In particolare, da a.1 e a.2 segue: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(B|A) = 0.55$; da a.1 e a.4 segue: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.5$. Quindi:

b.1 si chiede $\mathbb{P}(A \cup B)$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.55$;

b.2 si chiede $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.45$;

b.3 si chiede $\mathbb{P}(A \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$;

b.4 si chiede $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0.45$;

b.5 si chiede $\mathbb{P}(B^c|A)$: $\mathbb{P}(B^c|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A)} = 0.2$.