

Soluzioni Secondo appello

S 1. Indichiamo con T l'evento “*esce testa*” e con V l'evento “*si vince*”

a) Si ha

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|T^c)\mathbb{P}(T^c) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{36}$$

b) Si ha

$$\mathbb{P}(T|V) = \frac{\mathbb{P}(V|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{10}.$$

c) Ripetere il gioco equivale ad effettuare prove indipendenti del gioco stesso. Se “*successo*”=“*si vince*”, allora il tempo di primo successo dà anche la durata del gioco. Indicando con T tale variabile, allora $T = X + 1$, dove $X \sim \text{Ge}(5/36)$. Dunque, $\mathbb{E}(T) = 36/5$ è la quantità richiesta.

d) Indichiamo con S_{3600} = numero di vittorie sulle 3600 prove. Ovviamente, $S_{3600} \sim \text{B}(3600, 5/36)$ e si chiede $\mathbb{P}(480 < S_{3600} < 530)$. Useremo l'approssimazione gaussiana con correzione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(480 < S_{3600} < 530) &= \mathbb{P}(S_{3600} \leq 529) - \mathbb{P}(S_{3600} \leq 480) \\ &= \mathbb{P}(S_{3600} \leq 529.5) - \mathbb{P}(S_{3600} \leq 480.5) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{3600} - 500}{\sqrt{3600 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36}}} \leq \underbrace{\frac{529.5 - 500}{\sqrt{3600 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36}}}}_{=1.42}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_{3600} - 500}{\sqrt{3600 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36}}} \leq \underbrace{\frac{480.5 - 500}{\sqrt{3600 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36}}}}_{=-0.94}\right) \\ &\simeq \Phi(1.42) - \Phi(-0.94) = \Phi(1.42) - 1 + \Phi(0.94) = 0.92220 - 1 + 0.82639 = 0.74859. \end{aligned}$$

S 2. a) Ovviamente, $x = -1$ non è un valore ammissibile per X , cioè $p_X(-1) = 0$, dunque la media condizionata all'evento $\{X = -1\}$ non ha senso. Lavoriamo dunque con $x = 1$. Si ha, per $x = 1$ ma anche $x = 2, 3, \dots$,

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)},$$

dove

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) = \sum_{y \in \{-x, 0, x\}} \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} \cdot 3 = \frac{1}{(x-1)!} e^{-1}$$

(cioè, X si distribuisce come una v.a. $\text{Po}(1)+1$). Allora,

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } y = -x, 0, x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e $\mathbb{E}(Y|X=x) = \sum_y y p_{Y|X}(y|x) = 0$ (perché la legge di Y dato $X=x$ è una legge uniforme su $\{-x, 0, x\}$, con $x = 1, 2, \dots$).

b) Poiché $X > 0$, la v.a. Y/X è effettivamente ben posta e si ha

$$p_W(w) = \sum_z \mathbb{P}(X=z, Y/X=w) = \sum_z \mathbb{P}(X=z, Y=zw) = \sum_z p_{XY}(z, zw)$$

da cui segue che $p_W(w) = 0$ se $w \notin \{-1, 0, 1\}$ e in caso contrario

$$p_W(w) = \sum_z p_{XY}(z, zw) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)!} e^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Ricapitolando,

$$p_W(w) = \frac{1}{3} 1_{z \in \{-1, 0, 1\}}$$

cioè $W \sim \text{Un}(\{-1, 0, 1\})$.

c) Se $U_k = |W_k|$, allora $U_1, \dots, U_n$ sono i.i.d. e bernoulliane di parametro $2/3$, quindi la media e la varianza sono date rispettivamente da $2/3$ e $2/3 \cdot 1/3 = 2/9$.

Ora, si cerca n t.c.

$$\mathbb{P}\left(\left|3 \sum_{k=1}^n U_k - 2n\right| < n\right) \geq 0.9$$

Passando al complementare, dividendo opportunamente per $3n$ ed usando la disuguaglianza di Chebycev, otteniamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k - \frac{2}{3}\right| \geq \frac{1}{3}\right) \leq \frac{\text{Var}(U)}{n(1/3)^2} = \frac{2}{n}.$$

Ponendo quindi $2/n \leq 0.1$, si ottiene $n \geq 20$.

S 3. a) Ovviamente, dev'essere $a \in (0, 1]$, perché se si avesse $a > 1$ allora p_X assumerebbe valori negativi, e non può essere. Per c , osserviamo che

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = c \int_{-a}^{+a} (1-x^2) dx = 2c \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} ac(3-a^2)$$

da cui si ottiene $c = \frac{3}{2a(3-a^2)}$.

È immediato verificare che $\mathbb{E}(X)$ esiste ed inoltre $\mathbb{E}(X) = 0$ (perché $x \mapsto xp_X(x)$ è una funzione dispari).

b) Per $a = 1$, si ha $p_X(x) = \frac{3}{4}(1-x^2) 1_{|x|<1}$. Studiamo $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \geq 1-y)$: ovviamente $F_Y(y) = 1$ se $y \geq 1$ e per $y < 1$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(X^2 \geq 1-y) = \mathbb{P}(X \geq \sqrt{1-y}) + \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{1-y}) \\ &= 1 - F_X(\sqrt{1-y}) + F_X(-\sqrt{1-y}). \end{aligned}$$

Derivando,

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 1_{y < 1} \cdot \left(-p_X(\sqrt{1-y}) \frac{-1}{2\sqrt{1-y}} + p_X(-\sqrt{1-y}) \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \right)$$

da cui si ottiene

$$p_Y(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y}} 1_{0 < y < 1}.$$

S 4. a) Se A e B sono indipendenti allora anche A e B^c lo sono, dunque $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$. Se ne deduce quindi che **a1)** è decisamente falsa ma **a2)** è vera (grazie a quel $\leq$ al posto di $<$).

b) Vero: per ipotesi $\text{Cov}(X, Y) \leq 0$, quindi $\text{Cov}(X, X-Y) = \text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) \geq 0$.

c) Falso. Si può dimostrare ad esempio usando la disuguaglianza di Chebycev. Infatti,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n > 1\right) \leq \mathbb{P}(|S_n| > n\sqrt{n}) \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n \leq 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n > 1\right)\right) = 1 \neq \Phi(1).$$

Alternativamente, si può usare il TLC: fissato (arbitrariamente) m , per ogni $n \geq m$ si ha

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq n\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq m\right)$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n \leq 1\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq m\right) = \Phi(m).$$

Ora, dato che m è arbitrario, possiamo passare al limite per $m \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n \leq 1\right) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(m) = 1$$

e poiché il limite non può essere > 1 , necessariamente si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n \leq 1\right) = 1 \neq \Phi(1).$$