

Soluzioni Primo appello

S 1. Immaginando che i 15 posti della fila siano numerati, possiamo prendere

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{1, \dots, 15\}, i = 1, 2, 3, \omega_i \neq \omega_j \text{ per } i \neq j, \\ \text{e senza tener conto dell'ordine}\}.$$

In altre parole, $\Omega = C_3^{15}$, e quindi $|\Omega| = \binom{15}{3}$.

Se $A = \{\text{i tre amici sono seduti vicini}\}$, allora $\omega \in A$ se e solo se $\omega_1 = i$, $\omega_2 = i + 1$, $\omega_3 = i + 2$, con $i = 1, \dots, 13$. Dunque, $|A| = 13$. Scegliendo poi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P} =$ probabilità uniforme, si ottiene:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{\binom{15}{3}} = \frac{1}{35}.$$

S 2. Se $A = \{\text{viene scelta la moneta } a\}$ e $B = \{\text{viene scelta la moneta } b\}$, allora

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c) = \frac{2}{3}.$$

a) Si ha

$$\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}(T_1 | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_1 | B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Usando poi il fatto che se è noto quale moneta si lancia allora i lanci sono indipendenti, si ha anche

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{8}.$$

b1) Si chiede $\mathbb{P}(A | T_1 \cap T_2)$:

$$\mathbb{P}(A | T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}.$$

b2) Si chiede $\mathbb{P}(T_3^c | T_1 \cap T_2)$:

$$\mathbb{P}(T_3^c | T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}.$$

Il denominatore è stato già calcolato. Per il numeratore:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c) &= \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c | B)\mathbb{P}(B) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{96}. \end{aligned}$$

Quindi, $\mathbb{P}(T_3^c | T_1 \cap T_2) = 7/12$.

c) Osserviamo che (essendo $\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(T_1)$)

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(T_2),$$

quindi $T_1, \dots, T_{10}$ non sono indipendenti.

S 3. Intanto, per $x = 0, 1, \dots$,

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y) = \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{x!(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{1}{(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e^{-2}}{x!} \cdot e = \frac{e^{-1}}{x!},$$

cioè $X \sim \text{Po}(1)$. Dunque, per $x \geq 0$, si ha

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{(y-x)!} & \text{se } y = x, x+1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y | X = x) &= \sum_y y p_{Y|X}(y|x) = \sum_{y=x}^{+\infty} y \cdot \frac{e^{-1}}{(y-x)!} = \sum_{y=x}^{+\infty} (y-x) \cdot \frac{e^{-1}}{(y-x)!} + \sum_{y=x}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-1}}{(y-x)!} \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + x \cdot 1 = e^{-1} \cdot e + x = 1 + x. \end{aligned}$$

b) Si ha

$$p_{Z,W}(z, w) = \mathbb{P}(X+1 = z, Y-X = w) = \mathbb{P}(X = z-1, Y = z+w-1) = p_{XY}(z-1, z+w-1).$$

Ora, $p_{XY}(z-1, z+w-1) \neq 0$ se e solo se $z-1 = 0, 1, \dots$, $z+w-1 = 0, 1, \dots$ e $z+w-1 \geq z-1$, il che equivale a dire: $z = 1, 2, \dots$ e $w = 0, 1, \dots$. In tal caso,

$$p_{XY}(z-1, z+w-1) = \frac{e^{-2}}{(z-1)!w!}.$$

Ma allora

$$p_{Z,W}(z, w) = g_1(z)g_2(w), \text{ con } g_1(z) = \frac{e^{-1}}{(z-1)!} 1_{z=1,2,\dots} \quad \text{e} \quad g_2(w) = \frac{e^{-1}}{w!} 1_{w=0,1,2,\dots}.$$

Da qui si deduce che Z e W sono indipendenti ed inoltre (avendo già messo a posto le costanti!) $p_Z = g_1$ e $p_W = g_2$ (in particolare, $W \sim \text{Po}(1)$).

S 4. a) Falso: se $\text{Cov}(X, Y) = 0$ allora non è detto che X e Y siano indipendenti, condizione che equivale alla fattorizzazione della densità congiunta nel prodotto delle marginali.

b) Vero: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ e se $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ allora rimane $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$.

c) Vero: per $n \rightarrow \infty$ allora la legge di S_n converge ad una legge Po(1), quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(S_n = 0)) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = 1 - e^{-1}.$$

S 5. Osserviamo anzitutto che X e Y sono indipendenti, entrambe con legge $B(3, 1/2)$. Si ha:

$$\text{Cov}(X + Y, X - \alpha Y) = \underbrace{\text{Var}(X)}_{=3/4} + \underbrace{(1 - \alpha)\text{Cov}(X, Y)}_{=0} - \underbrace{\alpha\text{Var}(Y)}_{=3/4} = \frac{3}{4}(1 - \alpha).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \alpha > 1 &\Rightarrow \text{dipendenza negativa} \\ \alpha = 1 &\Rightarrow \text{dipendenza nulla} \\ \alpha < 1 &\Rightarrow \text{dipendenza positiva} \end{aligned}$$

Nota: al solito, se $\alpha = 1$ non è detto che ci sia indipendenza.

Per scrivere l'equazione della retta di regressione richiesta, occorrono le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 3 \\ \mathbb{E}(X - \alpha Y) &= \mathbb{E}(X) - \alpha\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}(1 - \alpha) \\ \text{Var}(X - \alpha Y) &= \text{Var}(X) + \alpha^2\text{Var}(Y) = \frac{3}{4}(1 + \alpha^2) \end{aligned}$$

dunque nel piano (u, v) l'equazione richiesta è:

$$v = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha^2} \left(u - \frac{3}{2}(1 - \alpha) \right) + 3.$$

S 6. Se indichiamo con T_1 e T_2 la durata delle due unità $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, possiamo supporre che T_1 e T_2 siano indipendenti e con legge $\text{Un}(0, 1)$. Indichiamo con F e p rispettivamente la f.r. e la densità della legge $\text{Un}(0, 1)$. Essendo le due unità poste in serie, il tempo di vita del sistema $\mathcal{S}$ è $S = T_1 \wedge T_2$.

a) Si chiede $\mathbb{E}(S)$ e $\text{Var}(S)$. Calcoliamo quindi la legge di S :

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \mathbb{P}(S \leq s) = \mathbb{P}(T_1 \wedge T_2 \leq s) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_1 \wedge T_2 > s) = 1 - \mathbb{P}(T_1 > s, T_2 > s) = 1 - (1 - F(s))^2 \end{aligned}$$

Allora, la densità è

$$p_S(s) = \frac{d}{ds} F_S(s) = \frac{d}{ds} (1 - F^2(s)) = 2p(s)(1 - F(s)) = 2(1 - s) 1_{0 < s < 1},$$

e media e varianza sono

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \int_0^1 2s(1 - s) ds = \frac{1}{3} \\ \text{Var}(S) &= \int_0^1 2s^2(1 - s) ds - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

b) Indichiamo con S_i la durata del sistema $\mathcal{S}_i$: $S_1, \dots, S_n$ sono indipendenti e tutti con la stessa legge di S . Inoltre, $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n S_i/n$ è la durata media empirica, mentre quella teorica è $\mathbb{E}(S) = 1/3$. Si cerca quindi n affinché $\mathbb{P}(|\bar{S}_n - 1/3| < 0.1) \geq 0.99$, o equivalentemente $\mathbb{P}(|\bar{S}_n - 1/3| \geq 0.1) \leq 0.01$. Ciò può essere fatto usando la disuguaglianza di Chebycev:

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{S}_n - \frac{1}{3}\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{\text{Var}(\bar{S}_n)}{(0.1)^2} = \frac{1}{18n(0.1)^2} \leq 0.01,$$

il che dà $n \geq 10^4/18 = 555.\bar{5}$. Oppure, immaginando n grande, si può anche usare l'approssimazione gaussiana (farlo!).

S 7. Intanto, possiamo supporre che X e W siano indipendenti, cosicché $Y = X + W \sim N(173, 36)$.

a) Si chiede $\mathbb{P}(Y > 170)$:

$$\mathbb{P}(Y > 170) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Y - 173}{6}}_{\sim N(0,1)} > \frac{170 - 173}{6}\right) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.69146.$$

b) Si chiede α tale che $0.99 = \mathbb{P}(|Y - 173| < \alpha)$:

$$\mathbb{P}(|Y - 173| < \alpha) = \mathbb{P}\left(\left|\underbrace{\frac{Y - 173}{6}}_{\sim N(0,1)}\right| < \frac{\alpha}{6}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{\alpha}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) - 1.$$

Quindi dev'essere

$$0.99 = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) - 1, \quad \text{cioè } \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) = 0.995,$$

da cui segue che $\alpha = 6 \cdot \phi_{0.995} = 6 \cdot 2.5758 = 15.4548$.

S 8. a) Vero: usando la disuguaglianza di Markov con $k = 1$ (qui $X \sim \text{Ge}(p)$, quindi in particolare $X \geq 0$ e $\mathbb{E}(X) = p/(1 - p)$) si ha, per ogni $x > 0$,

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x} = \frac{p}{(1 - p)x}.$$

b1) Vero: dal teorema del Limite Centrale,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} > 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}\sigma^2} > 0\right) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

b2) Falso: dalla legge dei Grandi Numeri,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{n} > 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{S}_n - p > 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{S}_n - p| > 1) = 0,$$

dunque quel limite è 0 e non $1/2$.