

Primo esonero di Probabilità 1
15 aprile 2005

E 1. [Svolgere l'esercizio costruendo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ad hoc.] Calcolare la probabilità che due vertici scelti a caso in un pentagono siano gli estremi di un lato.

E 2. Due urne, A e B , contengono 2 palline nere e 2 palline rosse. Dall'urna A vengono estratte senza reinserimento due palline, che vengono poi inserite nell'urna B .

- a) Sia X il numero di palline nere contenute ora nell'urna B . Calcolare la legge di X .
- b) Una pallina viene estratta da B : è nera. Qual è allora la probabilità di aver estratto da A una pallina rossa ed una nera?
- c) Da B vengono effettuate estrazioni ripetute, con reinserimento, e sia $N_i = \{\text{all}'i\text{-esima estrazione si osserva una pallina nera}\}$, $i = 1, 2, \dots$. Gli eventi N_i sono indipendenti?

E 3. Sia X una v.a. con densità discreta

$$p_X(x) = \begin{cases} c \cdot (1-p)^{|x|-1}p & \text{se } x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Mostrare che dev'essere $c = 1/2$.

Definiamo¹ $Z = 1_{\{X \geq 0\}} - 1_{\{X < 0\}}$ e $W = |X|$.

- b) Calcolare la legge congiunta di Z e W . Z e W sono indipendenti?
- c) Calcolare la legge condizionale di W dato Z e di X dato Z .

E 4. Per $n \geq 1$, sia $S_n \sim B(n, p_n)$, dove $p_n = 0$ se $n \leq \lambda$ e $p_n = \lambda/n$ quando $n > \lambda$, essendo $\lambda > 0$ un parametro fissato. Studiare la legge asintotica di S_n quando $n \rightarrow +\infty$ e dire se il limite, qualora esista, è una legge notevole.

¹Cioè, $Z = 1$ se $X \geq 0$ e $Z = -1$ se $X < 0$.