Secondo appello di Probabilità 1
6 luglio 2005

E 1. Consideriamo il seguente gioco. Si lancia dapprima una moneta (equa) e poi due dadi (equilibrati): se esce testa nel lancio della moneta, allora si vince se dal lancio dei due dadi si ottiene sempre il numero 1; se invece esce croce, si vince se lanciando i due dadi escono due numeri pari.

- a) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
- b) Calcolare la probabilità di aver ottenuto testa sapendo di aver vinto il gioco.
- c) Supponiamo di ripetere il gioco: quanto occorre attendere in media per vincere?
- d) Supponiamo di ripetere il gioco 3600 volte. Calcolare la probabilità di vincere un numero di volte compreso tra 480 e 530.

E 2. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)!} e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- a) Per $x = -1, 1$, dire se esiste e in caso affermativo calcolare la media condizionata di Y dato $X = x$.
- b) Verificare che la v.a. $W = Y/X$ è ben posta e calcolarne la legge.
- c) Siano $W_1, \dots, W_n$ copie indipendenti di W . Stimare n affinché con probabilità almeno 0.9 la v.a. $3 \sum_{k=1}^n |W_k| - 2n$ sia in modulo più piccola di n .

E 3. Sia X una v.a. con densità continua $p_X(x) = c(1 - x^2) 1_{\{|x| < a\}}$, dove $a, c > 0$.

- a) Dire quali valori di a e c sono ammissibili e per tali valori, calcolare $\mathbb{E}(X)$.
- b) Supponiamo $a = 1$. Calcolare la densità di $Y = 1 - X^2$.

E 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

- a) Se A e B sono due eventi indipendenti allora: **a1)** $\mathbb{P}(A \cap B^c) < \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$; **a2)** $\mathbb{P}(A \cap B^c) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$.
- b) Se X e Y hanno una dipendenza negativa allora X e $X - Y$ dipendono positivamente.
- c) Siano $X_1, X_2, \dots$ v.a. i.i.d., con media 0 e varianza 1. Posto $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} S_n \leq 1\right) = \Phi(1)$$

dove Φ denota la f.r. della legge $N(0, 1)$.