Primo appello e recupero esonero di Probabilità 1
16 giugno 2005

Recupero del primo esonero: svolgere gli esercizi **1**, **2**, **3**, **4**
Recupero del secondo esonero: svolgere gli esercizi **5**, **6**, **7**, **8**
Primo appello: svolgere gli esercizi **2**, **3**, **6**, parte **a)** di **4**, parte **b)** di **8**

E 1. [*Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *opportuno*] Tre amici si incontrano al cinema. Qual è la probabilità che si trovino seduti vicino, in una fila di 15 posti?

E 2. La moneta a è equa; la moneta b invece dà testa con probabilità $1/4$. Viene lanciato un dado: se esce un numero < 3, si prosegue lanciando 10 volte la moneta a, altrimenti si lancia 10 volte la moneta b. Sia $T_n = \{\text{all'}n\text{-esimo lancio esce testa}\}$, $n = 1, \dots, 10$.

- **a)** Calcolare la probabilità di T_1 e di $T_1 \cap T_2$.
- **b)** Se nei primi due lanci è uscita testa, qual è la probabilità che
  - **b1)** si stia lanciando la moneta a?
  - **b2)** al terzo lancio esca croce?
- **c)** Gli eventi $T_1, \dots, T_{10}$ sono indipendenti?

E 3. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **a)** Calcolare la distribuzione e la media condizionata di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.
- **b)** Calcolare la distribuzione congiunta di $Z = X + 1$ e $W = Y - X$. Z e W sono indipendenti?

E 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

- **a)** Se $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ allora la legge congiunta di X e Y si fattorizza nel prodotto delle marginali.
- **b)** Se $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \neq 0$ allora $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)$.
- **c)** Se $S_n \sim \mathrm{B}(n, 1/n)$ allora $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 0) = 1 - e^{-1}$.

E 5. Due monete eque vengono lanciate 3 volte. Siano X e Y il numero di teste osservate sui tre lanci rispettivamente della prima e della seconda moneta. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la dipendenza tra $X+Y$ e $X-\alpha Y$, e scrivere l'equazione della retta di regressione di $X+Y$ rispetto a $X-\alpha Y$.

E 6. Un sistema $\mathscr{S}$ è formato da due apparecchiature indipendenti, $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$, poste in serie. Supponiamo che $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ possano rompersi entrambe in un qualsiasi istante a caso tra 0 e 1 (anno).

a) Qual è la durata media del sistema? E quanto vale la sua varianza?

b) Supponiamo di avere n sistemi indipendenti $\mathscr{S}_1 \dots, \mathscr{S}_n$, tutti uguali in legge a $\mathscr{S}$. Come scegliere n affinché con probabilità almeno 0.99 la durata media empirica degli n sistemi disti dalla media teorica per meno di 0.1?

E 7. La statura X di un ragazzo scelto a caso tra coloro che si presentano alla visita di leva segue una legge gaussiana, di media 175 cm e varianza 30 cm^2. Un addetto misura le stature con una bilancia mal tarata, cosicché la statura registrata è $Y = X + W$, dove W è un errore gaussiano: $W \sim \mathrm{N}(-2, 6)$.

a) Calcolare la probabilità che la statura registrata sia superiore a 170 cm.

b) Calcolare α tale che con probabilità 0.99 la statura registrata disti da 173 cm per meno di α.

E 8. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

a) Se $X \sim \mathrm{Ge}(p)$ allora per ogni $x > 0$, $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{p}{(1-p)x}$.

b) Se $S_n \sim \mathrm{B}(n, p)$ allora

b1) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} > 0\Big) = \frac{1}{2}$

b2) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - np}{n} > 1\Big) = \frac{1}{2}$