

Capitolo 4

Modelli probabilistici per la finanza

4.1 Introduzione

In questo capitolo introdurremo un modello probabilistico utile per lo studio di alcuni problemi di finanza matematica, a cui abbiamo già accennato nel primo capitolo. La trattazione segue a per lo più il testo di Lamberton e Lapeyre [5].

Considereremo i problemi legati al calcolo del prezzo delle *opzioni*, che in passato è stata la motivazione principale per la costruzione della teoria della finanza matematica e tuttora rappresenta un esempio rilevante di utilizzo della teoria della probabilità e, in particolare, del calcolo stocastico.

Le opzioni sono state brevemente introdotte nel Capitolo 1, riprendiamo ora gli aspetti più importanti. Il nostro obiettivo è la costruzione di un modello matematico adatto a studiarle.

Una *opzione* dà a colui che la detiene il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un bene ad una data futura prefissata e ad un prezzo prefissato oggi. Un po' di terminologia:

- il bene cui si riferisce l'opzione è detto *bene o attivo sottostante*;
- l'istante in cui si può esercitare l'opzione è detto *maturità* o anche *data d'esercizio*;
- il prezzo prefissato è il *prezzo d'esercizio*.

Dunque, per caratterizzare un'opzione su un attivo finanziario occorre specificare

- il tipo di opzione: ad esempio, l'opzione a comprare si chiama *call*, l'opzione a vendere *put*;

- le modalità di esercizio: se l'opzione può essere esercitata esclusivamente alla data di maturità, l'opzione si dice *europea*; esistono anche opzioni, dette *americane*, che possono essere esercitate in un qualsiasi istante prima della maturità;
- il prezzo di esercizio K e la data di maturità T .

In questo capitolo ci occuperemo delle opzioni europee, rimandando al prossimo la trattazione delle opzioni americane.

Un'opzione costa. È evidente infatti che il detentore dell'opzione acquisisce un vantaggio, mentre chi ha ceduto l'opzione si è assunto dei rischi, che è giusto che vengano remunerati. Qual è il giusto compenso? Il prezzo dell'opzione è anche detto *premio*. Comunque, di solito, l'opzione è trattata in un mercato finanziario organizzato ed il prezzo è determinato dal mercato stesso. È comunque un problema interessante costruire un modello teorico per calcolare il prezzo, anche quando il premio è quotato dal mercato. Ciò permette infatti di studiare ed eventualmente individuare anomalie nelle quotazioni.

Ci si può aspettare che il prezzo di una data opzione debba dipendere dal comportamento dell'attivo sottostante (dal fatto che esso tenda a crescere o a decrescere oppure che sia soggetto o meno a forti oscillazioni). Vedremo che il prezzo di una opzione dipende dal comportamento dell'attivo sottostante unicamente per una sola quantità σ (la volatilità).

Il detentore dell'opzione è anche detto il *compratore dell'opzione*. Colui che invece cede l'opzione al detentore è detto *venditore dell'opzione*.

Per esempio, vediamo un po' più in dettaglio cosa succede nel caso della call europea (opzione a comprare). Indichiamo con t il tempo, supponendo $t \geq 0$ e $t = 0$ ha il significato di "oggi". Indichiamo ora con S_t il valore (=prezzo) di mercato all'istante t del bene sottostante l'opzione. Siano poi T l'istante di maturità e K il prezzo di esercizio della call. Il valore del bene sottostante a maturità è dato da S_T e la decisione di esercitare o meno l'opzione segue dal confronto tra S_T e K . Infatti,

se $S_T > K$, conviene comprare il bene al prezzo di esercizio K piuttosto che al prezzo di mercato S_T : *l'opzione è esercitata*;

se $S_T < K$, conviene comprare il bene al prezzo di mercato S_T piuttosto che al prezzo di esercizio K : *l'opzione non è esercitata*.

Dunque, la perdita a cui si espone il venditore di una opzione call, detto anche *valore o payoff della call*, è dato da

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0).$$

Si noti che S_T è il valore a maturità (cioè a $t = T$) del bene sottostante. In particolare è un valore futuro che oggi ($t = 0$) non si conosce.

I problemi di interesse, come vedremo sono due:

1. Quanto deve pagare il detentore il suo diritto di opzione?
2. Che tipo di investimenti deve fare il venditore dell'opzione per far fronte al contratto? In altre parole, come si fa a generare un ammontare di denaro che a maturità T dev'essere pari a $(S_T - K)_+$? Questo è il problema della *copertura dell'opzione*.

Considerazioni analoghe si possono fare nel caso di opzione put (opzione a vendere). Il valore della put europea è quindi dato da

$$(K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0) = (S_T - K)_-$$

dove, come sopra, K denota il prezzo di esercizio, T la maturità e S_T il valore del bene sottostante a maturità. Infatti, nel caso della put,

se $S_T < K$, conviene vendere il bene al prezzo di esercizio K piuttosto che al prezzo di mercato S_T : *l'opzione è esercitata*;

se $S_T > K$, conviene vendere il bene al prezzo di mercato S_T piuttosto che al prezzo di esercizio K : *l'opzione non è esercitata*.

Ricordiamo che sono in vigore le ipotesi sul mercato, che abbiamo fatto nel Capitolo 1 e in particolare nel paragrafo 1.2.3. Ad esse bisogna aggiungere quella di assenza di arbitraggio. Ricordiamo che una operazione di arbitraggio è un'operazione finanziaria tale che

- non occorre in alcun momento investire del capitale;
- non si può avere in alcun caso una perdita e si ha, con probabilità positiva, un guadagno.

Nel Capitolo 1, abbiamo già visto alcuni esempi di arbitraggio ed abbiamo anche osservato che, poiché i mercati finanziari sono molto liquidi (ovvero si possono effettuare numerose transazioni), la richiesta di assenza di arbitraggio è comunemente accettata nei modelli che descrivono i mercati finanziari.

In questo capitolo, daremo all'arbitraggio una definizione matematicamente rigorosa. Osserviamo che l'ipotesi di assenza di arbitraggio si traduce in condizioni che bisogna imporre al *modello matematico* che costruiremo. In altre parole, quando si costruisce un modello matematico per questo tipo di problemi sarà sempre necessario accertarsi che esso soddisfi alla proprietà assenza di arbitraggio.

4.2 Modelli discreti per la descrizione dei mercati finanziari

In questo paragrafo introduciamo un modello discreto, abbastanza semplice, che però permetterà di descrivere l'evoluzione dei prezzi in un mercato finanziario.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità finito: Ω è un insieme di cardinalità finita e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Supporremo anche che $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supponiamo sia definita una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$, con

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$$

L'indice n ha il significato di tempo (discreto), mentre la σ -algebra $\mathcal{F}_n$ rappresenta l'informazione data dal mercato fino all'istante n . Il tempo (finale) N rappresenterà invece la maturità dell'opzione.

Il mercato finanziario che consideriamo consiste di $d+1$ titoli finanziari, i cui prezzi al tempo n sono dati dalle $d+1$ componenti del vettore aleatorio

$$S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d).$$

Poché gli investitori conoscono presente e passato del mercato (ma ovviamente non il futuro), supporremo che, per ogni n , la v.a. S_n sia $\mathcal{F}_n$ -misurabile. In particolare, si ha S_0 deterministico¹.

Supporremo che il titolo di prezzo S_n^0 sia il *titolo non rischioso*. Se si suppone che il rendimento r su un periodo unitario sia costante, abbiamo già visto nel primo capitolo che

$$S_n^0 = S_0^0(1+r)^n$$

Normalmente, per convenzione, si pone $S_0^0 = 1$, dunque

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

Per $n = 0, 1, \dots, N$ sia

$$\beta_n = \frac{1}{S_n^0} = (1+r)^{-n}$$

il *coefficiente di sconto* al tempo n : se al tempo 0 si investe a tasso costante una quantità di denaro pari a x , al tempo n si riceverà una quantità pari a

$$x_n = x(1+r)^{-n} = \frac{x}{\beta_n}.$$

Quindi, in particolare β_n , è l'ammontare (in Euro) che occorre investire nel titolo non rischioso per avere disporre al tempo n di 1 Euro.

¹Ricordiamo infatti che una v.a. misurabile rispetto alla σ -algebra banale $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ è necessariamente costante.

I rimanenti titoli indicizzati con $1, 2, \dots, d$ sono detti *titoli rischiosi*. Ci troveremo spesso a considerare i valori scontati dei prezzi $\tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d$, definiti da

$$\tilde{S}_n^1 = (1+r)^{-n} \tilde{S}_n^1, \quad \dots \quad \tilde{S}_n^d = (1+r)^{-n} \tilde{S}_n^d$$

$\tilde{S}_n$ indicherà il vettore dei prezzi scontati, cioè

$$\tilde{S}_n = (1+r)^{-n} S_n = (1, \tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d)$$

4.3 Strategie ed arbitraggio

Indicheremo con il termine *portafoglio* un insieme di titoli presi tra i $d+1$ titoli presenti sul mercato, ciascuno dei quali in una certa quantità. Vediamo meglio come si definisce matematicamente un portafoglio.

Definizione 4.3.1. Chiameremo *strategia di gestione*, o più semplicemente una *strategia*, è una sequenza predicibile di v.a. $\phi = (\phi_n)_n$ a valori in $\mathbb{R}^{d+1}$, dove $\phi_n = (\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$.

Le quantità ϕ_n^i della Definizione 4.3.1 rappresentano la quantità (numero di quote) dell' i -esimo titolo presente nel portafoglio. In particolare il valore del portafoglio al tempo n per una strategia ϕ è pari a

$$\phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 + \dots + \phi_n^d S_n^d$$

Ricordiamo che una successione di v.a. $\phi = (\phi_n)_n$ si dice *predicibile* se

$$\phi_0 \text{ è } \mathcal{F}_0\text{-misurabile} \quad \text{e} \quad \text{per ogni } n \geq 1, \phi_n \text{ è } \mathcal{F}_{n-1}\text{-misurabile}$$

In particolare una strategia ϕ è adattata alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$, cioè, ϕ_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile, per ogni n .

La richiesta di predicibilità è abbastanza naturale. Imporre che ϕ_n sia $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabile significa tenere conto del fatto, che succede nella realtà, che l'investitore deve stabilire le quantità $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ *prima* di conoscere i valori dei prezzi al tempo n .

Ad esempio, se il tempo indica i giorni e $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ sono i prezzi allo n -esimo giorno, allora in chiusura dello n -esimo giorno, l'investitore dispone di un portafoglio $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ ed il suo portafoglio vale

$$\phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 + \dots + \phi_n^d S_n^d \tag{4.1}$$

Egli può decidere di vendere delle quote, acquistarne altre, eventualmente aggiungere nuovo denaro o toglierne, modificando la ripartizione del capitale investito. Per prendere queste decisioni egli dispone però solo delle informazioni fino al tempo n . Indichiamo con $\phi_{n+1}^0, \phi_{n+1}^1, \dots, \phi_{n+1}^d$ le quote dei vari attivi presenti nel portafoglio, dopo questa operazione di aggiustamento. Queste quantità devono quindi essere $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabili. Il suo capitale sarà ora pari a

$$\phi_{n+1}^0 S_n^0 + \phi_{n+1}^1 S_n^1 + \dots + \phi_{n+1}^d S_n^d \tag{4.2}$$

Osservazione 4.3.2. Nella Definizione 4.3.1, si richiede $\phi_n \in \mathbb{R}^{d+1}$, quindi $\phi_n^i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 0, 1, \dots, d$. In particolare si assume che queste v.a. possano prendere valori negativi oppure non interi. Osserviamo che questa condizione riflette le ipotesi che sono state fatte sul mercato nel paragrafo 1.2.3. In particolare è possibile effettuare vendite o acquisti allo scoperto. Poiché, come abbiamo visto, ϕ_n^i rappresenta la quantità investita nel titolo i , queste quantità ϕ_n^i possono prendere valori negativi. Inoltre è possibile acquistare frazioni di un bene finanziario, quindi le quantità ϕ_n^i possono prendere valori non interi.

Data una strategia ϕ , ad essa si possono associare alcune quantità d'interesse.

- Il valore, al tempo n , del portafoglio associato:

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_n \rangle = \sum_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i.$$

- Il valore scontato, al tempo n , del portafoglio associato:

$$\tilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_n, \tilde{S}_n \rangle = \sum_{i=0}^d \phi_n^i \tilde{S}_n^i.$$

dove

$$\tilde{S}_n = (1+r)^{-n} S_n = (1, \tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d)$$

è il vettore dei valori scontati dei prezzi. Da notare che la prima coordinata di quest'ultimo è sempre uguale a 1. Da notare anche che, evidentemente, $\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi)$

Nella classe di tutte le possibili strategie, particolare rilevanza hanno quelle autofinanzianti, soddisfacenti alla seguente

Definizione 4.3.3. Una strategia ϕ è detta *autofinanziante* se per ogni $n = 0, 1, \dots, N-1$ si ha

$$\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle.$$

Il significato di una strategia autofinanziante è abbastanza semplice. La quantità $\langle \phi_n, S_n \rangle$ è la stessa cosa che la (4.1), cioè il capitale investito al tempo n . Invece $\langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ è la stessa cosa che la (4.2). Dunque una strategia è autofinanziante se ogni aggiustamento delle quote viene fatto senza aggiunta o ritiro di capitale.

Osservazione 4.3.4. L'uguaglianza $\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ è equivalente a

$$\langle \phi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle$$

o anche

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_{n+1} - S_n \rangle.$$

Questa seconda uguaglianza è particolarmente indicativa: una strategia ϕ è autofinanziante se la variazione del portafoglio (guadagno se > 0 , perdita se < 0) $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi)$ tra n e $n + 1$ dipende dalla variazione dei prezzi $S_{n+1} - S_n$ e dalle loro quote ϕ_n detenute al tempo n .

La proposizione che segue dà un'ulteriore caratterizzazione delle strategie autofinanzianti.

Proposizione 4.3.5. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

- i) *La strategia ϕ è autofinanziante.*
- ii) *Per ogni $n = 0, 1, \dots, N$,*

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle,$$

dove $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$ è il vettore delle variazioni dei prezzi al tempo j .

- iii) *Per ogni $n = 0, 1, \dots, N$,*

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right) \quad (4.3)$$

dove $\Delta \tilde{S}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$ è il vettore delle variazioni dei prezzi scontati al tempo j .

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Se ϕ è autofinanziante allora, per l'Osservazione 4.3.4,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n (V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se vale (ii) allora

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_n, \Delta S_{n+1} \rangle$$

e ancora l'Osservazione 4.3.4 garantisce che ϕ è autofinanziante.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Poiché $\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ se e solo se $\langle \phi_n, \tilde{S}_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, \tilde{S}_n \rangle$, basta procedere come sopra. La seconda uguaglianza in (iii) segue immediatamente dal fatto che $\Delta \tilde{S}_j^0 = \beta_j S_j^0 - \beta_{j-1} S_{j-1}^0 = 0$.

□

Osserviamo che la relazione (4.3) afferma, in particolare, che per una strategia autofinanziante, il valore del portafoglio al tempo n non dipende dalle quantità investite nel titolo non rischioso ϕ_n^0 . Più precisamente, si ha

Proposizione 4.3.6. Siano $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ un processo predicibile e V_0 una v.a. $\mathcal{F}_0$ -misurabile. Allora esiste un unico processo predicibile $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tale che $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ sia una strategia autofinanziante ed il valore del portafoglio associato a ϕ abbia valore iniziale V_0 : $V_0(\phi) = V_0$.

Dimostrazione. Il valore scontato del portafoglio associato a ϕ è

$$\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d$$

e abbiamo visto che ϕ è una strategia autofinanziante se e solo se

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right).$$

Se $V_0(\phi) = V_0$, ϕ_n^0 è dunque univocamente individuato da

$$\begin{aligned} \phi_n^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right) - \left(\phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d \right) = \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right) - \left(\phi_n^1 \tilde{S}_{n-1}^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_{n-1}^d \right). \end{aligned}$$

Basta quindi mostrare che $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ è predicibile, ma questo è immediato, poiché si vede che ϕ_n^0 è una funzione che dipende solo dalle quantità ϕ_k^i con $k \leq n$, S_j^i con $j \leq n-1$, che sono tutte quantità $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabili. $\square$

Osservazione 4.3.7. Osserviamo che, se i prezzi scontati dei titoli rischiosi, $(\tilde{S}_n^i)_n$, $i = 1, \dots, d$ fossero delle martingale, allora anche ogni portafoglio scontato sarebbe una martingala. Infatti, per $i = 1, \dots, d$, il processo

$$\sum_{j=1}^n \phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^i = \sum_{j=1}^n \phi_j^1 (\tilde{S}_j^i - \tilde{S}_{j-1}^i)$$

risulterebbe essere una martingala trasformata.

Abbiamo visto che un portafoglio può contenere anche quantità negative di un titolo. Sarà però ragionevole imporre talvolta che esso debba comunque avere un valore che sia globalmente positivo.

Definizione 4.3.8. Una strategia ϕ è detta *ammissibile* se è autofinanziante e se $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.

Possiamo ora formalizzare il concetto di arbitraggio, ossia la possibilità di effettuare profitti senza rischio:

Definizione 4.3.9. Una *strategia di arbitraggio* è una strategia ammissibile ϕ , tale che il valore iniziale del portafoglio associato è nullo e il valore finale è non nullo.

Una strategia ϕ quindi è d'arbitraggio se è autofinanziante se

$$\begin{aligned} V_0(\phi) &= 0 \\ V_n(\phi) &\geq 0 \text{ per ogni } n = 1, 2, \dots, N \\ \mathbb{P}(V_N(\phi) > 0) &> 0. \end{aligned}$$

4.4 Arbitraggio e martingale

È naturale porre la seguente

Definizione 4.4.1. Si dice che si è in *assenza di arbitraggio* o anche che il mercato è *privo di arbitraggio* se non è possibile costruire strategie di arbitraggio.

In questo paragrafo vedremo che la condizione di assenza di arbitraggio è equivalente ad una condizione molto interessante da un punto di vista matematico.

Osservazione 4.4.2. La Definizione 4.4.1 si può riscrivere in termini matematici nel modo seguente. Sia Γ la famiglia di v.a.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > 0) > 0\} \\ &= \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : X(\omega) \geq 0 \text{ per ogni } \omega \text{ ed esiste } \bar{\omega} \text{ t.c. } X(\bar{\omega}) > 0\}. \end{aligned}$$

Si tratta di un *cono*: se $X \in \Gamma$, allora anche $\lambda X \in \Gamma$ per ogni $\lambda > 0$. Inoltre Γ è un insieme convesso: se $0 \leq t \leq 1$ e $X, Y \in \Gamma$, allora $tX + (1-t)Y \in \Gamma$. Allora si può dire che il mercato è privo di arbitraggio se

per ogni strategia ammissibile ϕ tale che $V_0(\phi) = 0$ allora $V_N(\phi) \notin \Gamma$.

Lemma 4.4.3. Sia $((\rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ una sequenza predicibile a valori in $\mathbb{R}^d$ e sia

$$\tilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) = \sum_{j=1}^n \left(\rho_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \rho_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Se il mercato è privo di arbitraggio allora $G_N(\rho^1, \dots, \rho^d) \notin \Gamma$.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $G_N(\rho^1, \dots, \rho^d) \in \Gamma$. Poiché $((\rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ è predicibile, per la Proposizione 4.3.6 esiste un processo predicibile $(\rho_n^0)_n$ tale che $\rho = ((\rho_n^0, \rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ è una strategia autofinanziante. Inoltre si ha $\tilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) = \tilde{V}_n(\rho)$, con la condizione $V_0(\rho) = 0$. Dunque, se fosse $\tilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) \geq 0$ per ogni n , ρ sarebbe una strategia non solo autofinanziante ma anche ammissibile tale che $\mathbb{P}(V_N(\rho) > 0) >$

0, dunque una strategia di arbitraggio, il che non è possibile. Dunque, dev'essere

$$\mathbb{P}(\tilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0 \text{ per qualche } n < N.$$

Mostriamo che allora è possibile costruire una strategia di arbitraggio. Poniamo

$$n_0 = \sup\{n : \mathbb{P}(\tilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0\}.$$

È chiaro che $n_0 \leq N - 1$, e inoltre si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) &> 0 \\ \tilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) &\geq 0 \text{ per ogni } n = n_0 + 1, \dots, N \end{aligned}$$

Poniamo $A = \{\tilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0\}$ e definiamo il processo ϕ nel modo seguente: per $i = 1, \dots, d$,

$$\phi_n^i = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq n_0 \\ \rho_n^i 1_A & \text{se } n > n_0. \end{cases}$$

Verifichiamo che $(\phi_n^i)_n$ è predicibile: per $n \leq n_0$ si ha $\phi_n^i = 0$, dunque $\phi_n^i = 0$ è $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabile; se invece $n > n_0$, ϕ_n^i è una funzione misurabile di ρ_n^i , che è $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabile, e di $\tilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d)$, che è $\mathcal{F}_{n_0}$ -misurabile e quindi anche $\mathcal{F}_{n-1}$ -misurabile. Per la Proposizione 4.3.6, esiste un processo $(\phi_n^0)_n$, predicibile, tale che $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ sia una strategia autofinanziante di portafoglio scontato

$$\tilde{V}_n(\phi) = \sum_{j=1}^n \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right)$$

(abbiamo scelto $V_0 = 0$). Sostituendo ϕ , otteniamo facilmente

$$\tilde{V}_n(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq n_0 \\ (\tilde{G}_n(\rho) - \tilde{G}_{n_0}(\rho)) 1_A & \text{se } n > n_0. \end{cases}$$

Poiché $\tilde{G}_n(\rho) \geq 0$ per ogni $n \geq n_0$, mentre $\tilde{G}_{n_0}(\rho) < 0$ su A , ne segue che ogni n , dunque ϕ è ammissibile e che $\mathbb{P}(V_N(\phi) > 0) = \mathbb{P}(\tilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0$. Poiché $V_0(\phi) = 0$, ϕ è una strategia di arbitraggio. $\square$

Useremo nella dimostrazione del prossimo teorema il classico *teorema di separazione dei convessi*, nella forma seguente:

Teorema 4.4.4. *Siano $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme compatto e convesso e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ un sottospazio tali che $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Allora, esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\begin{aligned} \text{per ogni } x \in K & \quad \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell x_\ell > 0 \\ \text{per ogni } x \in \mathcal{V} & \quad \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell x_\ell = 0. \end{aligned}$$

In altre parole, il sottospazio $\mathcal{V}$ è contenuto in un iperpiano chiuso che non contiene K .

Per la dimostrazione e maggiori dettagli sul significato intuitivo di questo risultato, si rimanda all'Appendice a questo capitolo (cfr. Paragrafo 4.9.1)

Vediamo ora il risultato principale di questo paragrafo. Esso prende il nome di *primo teorema fondamentale dell'asset pricing*.

Teorema 4.4.5. *Un mercato è privo di arbitraggio se e solo se esiste una misura di probabilità $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tale che il vettore dei prezzi scontati dei titoli rischiosi è una $\mathbb{P}^*$ -martingala.*

Ricordiamo che due misure di probabilità $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}^*$ su $(\Omega, \mathcal{F})$ sono *equivalenti* se hanno gli stessi insiemi di misura nulla cioè se $\mathbb{P}(A) = 0$ se e solo se $\mathbb{P}^*(A) = 0$, per $A \in \mathcal{F}$. Ora, poiché supponiamo Ω finito, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$, in questo caso ovviamente $\mathbb{P}^*$ è equivalente a $\mathbb{P}$ se e solo se $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Inoltre, sempre perché Ω è finito, possiamo identificare ogni v.a. X su Ω con il vettore $(X(\omega))_{\omega \in \Omega}$. Indicheremo con $\mathbb{R}^\Omega$ l'insieme di questi vettori.

Dimostrazione Prima parte: supponiamo che esista una misura di probabilità $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$, tale che il vettore dei prezzi scontati $((\tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d))_n$ sia una $\mathbb{P}^*$ -martingala e mostriamo che in tal caso il mercato è privo di arbitraggio.

Sia $\phi = (\phi_n)_n$ una strategia ammissibile (ovvero, autofinanziante e tale che $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni n). Allora, dalla Proposizione 4.3.5 segue che

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle.$$

Poiché ϕ_n è predicibile e $(\tilde{S}_n^i)_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala per ogni $i = 1, \dots, d$, $(\tilde{V}_n(\phi))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala (vedi l'Osservazione 4.3.7), dunque, in particolare,

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(V_0(\phi)),$$

dove con $\mathbb{E}^*$ indichiamo l'aspettazione rispetto alla misura $\mathbb{P}^*$. Se supponiamo $V_0(\phi) = 0$, si ha

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = 0.$$

Poiché per ipotesi ϕ è ammissibile, in particolare si ha $V_N(\phi) \geq 0$. Dunque, otteniamo $V_N(\phi) \geq 0$ e $\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = 0$: ciò significa che necessariamente $\mathbb{P}^*(\tilde{V}_N(\phi) > 0) = 0$. Poiché $\mathbb{P}$ è equivalente a $\mathbb{P}^*$, si ha anche $\mathbb{P}(\tilde{V}_N(\phi) > 0) = 0$ ed otteniamo che ogni strategia ammissibile di valore iniziale nullo è necessariamente tale che $\mathbb{P}(\tilde{V}_N(\phi) > 0) = 0$, dunque non esistono strategie di arbitraggio.

Seconda parte: supponiamo che il mercato sia privo di arbitraggio e dimostriamo l'esistenza di una misura di probabilità $\mathbb{P}^*$ sotto la quale i prezzi scontati sono una martingala.

A tale scopo, utilizziamo la Proposizione 3.2.6: mostriamo che esiste una misura $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tale che per ogni processo predicibile $(\rho_n^i)_n$ si ha che $\mathbb{E}^*(\sum_{n=1}^N \rho_n^i \Delta \tilde{S}_n^i) = 0$, per ogni $i = 1, \dots, d$. È immediato vedere che ciò equivale a dimostrare che

$$\mathbb{E}^*(\tilde{G}_N(\rho)) = 0, \text{ essendo } \tilde{G}_N(\rho) = \sum_{n=1}^N \left(\rho_n^1 \Delta \tilde{S}_n^1 + \dots + \rho_n^d \Delta \tilde{S}_n^d \right) \quad (4.4)$$

per ogni processo predicibile $((\rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ a valori in $\mathbb{R}^d$. Il Lemma 4.4.3 garantisce che $\tilde{G}_N(\rho) \notin \Gamma$. Ora, l'insieme

$$\mathcal{V} = \{ \tilde{G}_N(\rho); ((\rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n \text{ processo predicibile} \},$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^\Omega$ (cioè dell'insieme delle v.a. su Ω) e, per il Lemma 4.4.3, $\mathcal{V} \cap \Gamma$. Dunque, a maggior ragione, se poniamo

$$K = \{ X \in \Gamma; \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1 \}$$

si ha

$$\mathcal{V} \cap K = \emptyset.$$

È immediato verificare che $K \subset \mathbb{R}^\Omega$ è convesso e compatto, (è chiuso e limitato) Possiamo dunque applicare il Teorema 4.4.4: esiste $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ tale che

(a) se $X \in K$ allora $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$;

(b) se ρ è un processo predicibile allora $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_N(\rho)(\omega) = 0$.

Da (a) otteniamo che $\lambda(\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Infatti, il vettore X definito $\bar{X}(\bar{\omega}) = 1$ e $\bar{X}(\omega) = 0$ appartiene a K e la condizione (a) implica subito che deve essere $\lambda(\omega) > 0$. Definiamo allora la seguente misura di probabilità $\mathbb{P}^*$ su Ω :

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = c_\lambda^{-1} \cdot \lambda(\omega), \text{ dove } c_\lambda = \sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega').$$

Per ipotesi $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ per ogni ω , dunque $\mathbb{P}^*$ è equivalente a $\mathbb{P}$. Inoltre, usando (b), otteniamo

$$\mathbb{E}^*(\tilde{G}_N(\rho)) = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{G}_N(\rho)(\omega) \mathbb{P}^*(\{\omega\}) = c_\lambda^{-1} \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{G}_N(\rho)(\omega) \lambda(\omega) = 0.$$

Riassumendo: abbiamo determinato una misura di probabilità $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tale che (4.4) è vera; poiché abbiamo visto che (4.4) garantisce che $((\tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala, la tesi è dimostrata. $\square$

Dunque, l'assenza di arbitraggio equivale all'esistenza di una misura $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ sotto la quale i prezzi scontati sono $\mathbb{P}^*$ -martingale. Le misure $\mathbb{P}^*$ che verificano tali proprietà sono dette *misure equivalenti di martingala*.

Osservazione 4.4.6. È utile osservare che, in assenza di arbitraggio, ogni strategia autofinanziante di valore finale ≥ 0 è necessariamente ammissibile, cioè autofinanziante e tale che il portafoglio associato è sempre non negativo. Infatti, se $V_N(\phi) \geq 0$, allora anche $\tilde{V}_N(\phi) = (1+r)^{-N}V_N(\phi) \geq 0$. Inoltre, in assenza di arbitraggio esiste $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ tale che $(\tilde{S}_n)_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala, quindi anche $(\tilde{V}_n(\phi))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala (si veda l'Osservazione 4.3.7). Allora, per ogni $n \leq N$,

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n) \geq 0,$$

poiché la speranza condizionata di una v.a. ≥ 0 è sempre ≥ 0 . Dunque ϕ è anche ammissibile.

Esempio 4.4.7. [La parità call-put] Vediamo ora che, in assenza di arbitraggio, tra il prezzo dell'opzione put e quello della call (per uno stesso strike e per una stessa maturità) vale una relazione fissa, che permette di dedurre l'uno dall'altro.

Indichiamo con C_n e P_n rispettivamente il prezzo al tempo n di una call e di una put, scritte sul bene sottostante di valore $(S_n)_{n \leq N}$, aventi stessa maturità N e uguale prezzo di esercizio K . In assenza di arbitraggio, vale allora la seguente relazione

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}, \quad (4.5)$$

nota con il nome di *formula di parità call-put*.

Per dimostrare la (4.5), supponiamo che il nostro mercato sia formato, oltre che dal titolo non rischioso, dai seguenti titoli: il bene sottostante le opzioni call e put, l'opzione call e l'opzione put. In altre parole, supponiamo che

$$S_n^1 = S_n, \quad S_n^2 = C_n, \quad S_n^3 = P_n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Se il mercato è privo di arbitraggio, allora $((\tilde{S}_n^1, \tilde{S}_n^2, \tilde{S}_n^3))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala, dunque anche $(\tilde{S}_n^2 - \tilde{S}_n^3)_n \equiv ((1+r)^{-n}(C_n - P_n))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala:

$$(1+r)^{-n}(C_n - P_n) = \mathbb{E}^*\left((1+r)^{-N}(C_N - P_N) \mid \mathcal{F}_n\right).$$

Ora, a maturità N dev'essere necessariamente $C_N = (S_N - K)_+$ e $P_N = (K - S_N)_+$, dunque $C_N - P_N = S_N - K$ e si ha

$$(1+r)^{-n}(C_n - P_n) = \mathbb{E}^*\left((1+r)^{-N}(S_N - K) \mid \mathcal{F}_n\right).$$

Ora, poiché $(\tilde{S}_n)_n$ è anch'essa una $\mathbb{P}^*$ -martingala, $\mathbb{E}^*((1+r)^{-N}S_N \mid \mathcal{F}_n) = (1+r)^{-n}S_n$, dunque

$$(1+r)^{-n}(C_n - P_n) = (1+r)^{-n}S_n - (1+r)^{-N}K,$$

da cui segue immediatamente la (4.5).

La formula di parità (4.5) si può anche dimostrare direttamente usando argomenti di arbitraggio: se la (4.5) fosse falsa, cioè se si avesse

$$C_n - P_n > S_n - K(1+r)^{-(N-n)} \quad \text{oppure} \quad C_n - P_n < S_n - K(1+r)^{-(N-n)},$$

allora ci sarebbe arbitraggio.

Cominciamo col supporre $C_n - P_n > S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$. Potremmo allora, all'istante n , vendere una call e comprare una quota di bene sottostante ed una put. Al netto, il bilancio dell'operazione è

$$C_n - P_n - S_n.$$

Se questa quantità è positiva la investiamo nel titolo senza rischio. Se è negativa ciò significa che abbiamo preso in prestito la quantità corrispondente. In entrambi i casi questo capitale all'istante N vale

$$(C_n - P_n - S_n)(1+r)^{N-n}.$$

Ora, all'istante N ,

- se $S_N > K$: la call è esercitata, dunque cediamo l'unità di sottostante che possediamo e riceviamo un compenso pari a K (la put non ha valore, dato che il prezzo di esercizio è inferiore a quello di mercato). Dunque il bilancio finale dell'operazione è

$$\begin{aligned} & K + (C_n - P_n - S_n)(1+r)^{N-n} \\ &= (1+r)^{N-n}(C_n - P_n - S_n + K(1+r)^{-(N-n)}) > 0; \end{aligned}$$

- se $S_T \leq K$: esercitiamo la put, cedendo l'unità di sottostante al prezzo K (la call non ha valore). Ci ritroviamo quindi con un capitale uguale ancora a

$$\begin{aligned} & K + (C_n - P_n - S_n)(1+r)^{N-n} \\ &= (1+r)^{N-n}(C_n - P_n - S_n + K(1+r)^{-(N-n)}) > 0; \end{aligned}$$

Dunque, in ogni caso, all'istante N si ha un profitto sicuro. Queste strategie sono autofinanziate e di valore iniziale nullo. Se non ci fosse arbitraggio, sarebbero anche ammissibili per l'Osservazione 4.4.6. Avremmo dunque costruito una strategia di arbitraggio. Dunque, supponendo l'assenza di arbitraggio, non può essere $C_n - P_n > S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$. In maniera simile si mostra che l'assenza di arbitraggio implica che non può essere $C_n - P_n < S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$.

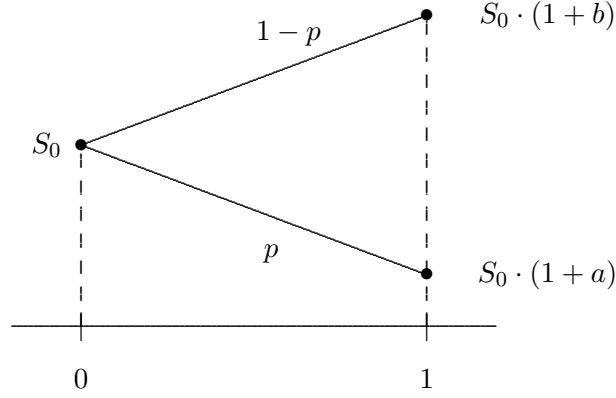


Figura 4.1: Il modello binomiale ad un periodo

Esempio 4.4.8. [Modello binomiale a un periodo: mancanza di arbitraggio] Consideriamo il modello più semplice. Supponiamo $d = 1$ (cioè un solo attivo) e che vi sia un solo periodo temporale, durante il quale il prezzo dell'attivo possa crescere di un fattore $1+a$ oppure $1+b$, $-1 < a < b$, cioè (detto S il prezzo del titolo rischioso):

$$S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot (1 + a) & \text{con probabilità } = p \\ S_0 \cdot (1 + b) & \text{con probabilità } = 1 - p \end{cases}$$

dove S_0 (deterministico) è il prezzo iniziale (si veda la Figura 4.1). Si tratta di un modello senza arbitraggio?

Possiamo supporre $\Omega = \{1 + a, 1 + b\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $S_1(\omega) = S_0 \cdot \omega$. Ovviamente, $\mathbb{P}(\{1 + a\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{1 + b\})$, dunque il modello verifica le condizioni che abbiamo sempre richiesto se supponiamo $p \in (0, 1)$. Una misura di probabilità $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ dev'essere tale che $\mathbb{P}^*(\{1 + a\}) = p^* = 1 - \mathbb{P}^*(\{1 + b\})$, con $p^* \in (0, 1)$. Grazie al Teorema 4.4.5, possiamo dire che l'assenza di arbitraggio equivale a determinare, se esiste, p^* tale che il prezzo scontato dell'attivo di base sia una martingala, cioè

$$\mathbb{E}^*((1 + r)^{-1} S_1 \mid \mathcal{F}_0) = S_0 \quad (4.6)$$

Poiché $\mathcal{F}_0$ è la σ -algebra banale, fare la speranza condizionale è lo stesso che fare la speranza matematica. Si ha

$$\mathbb{E}^*((1 + r)^{-1} S_1) = (1 + r)^{-1} (p^* S_0 (1 + a) + (1 - p^*) S_0 (1 + b))$$

Dunque perché (4.6) sia soddisfatta, deve essere

$$p^* (1 + a) + (1 - p^*) (1 + b) = 1 + r$$

ovvero

$$p^* = \frac{b - r}{b - a}.$$

Questo valore di p^* risulta > 0 se $b > r$ e < 1 se $a < r$. Dunque $0 < p^* < 1$ se e solo se $a < r < b$.

Riassumendo, possiamo dire che questo (semplice) modello è privo di arbitraggio se e solo se $a < r < b$, e in tal caso $\mathbb{P}^*$ è la probabilità definita tramite $\mathbb{P}^*(\{1 + a\}) = p^* = 1 - \mathbb{P}^*(\{1 + b\})$, con $p^* = (b - r)/(b - a)$. Osserviamo che esiste un solo valore p^* che rende (4.6) vera, cioè che determina una misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^*$. Vedremo (cfr Esempio 4.5.6) che tale proprietà sarà particolarmente utile (dà infatti quella che chiameremo *completezza del mercato*).

4.5 Mercati completi e prezzo delle opzioni europee

Abbiamo già parlato di opzioni call e put europee. Ad esempio, una call europea sul bene sottostante di prezzo S^1 dà il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare il bene alla data N (maturità) ad un prezzo (di esercizio) K fissato oggi ($n = 0$). Il valore della call è dato da $(S_N^1 - K)_+$. Il valore di una put con uguale maturità e prezzo di esercizio, è invece $(K - S_N)_+$. Esistono opzioni più generali che le call e le put. Per citarne solo alcune, un'opzione digital europea è un'opzione di valore

$$1_{\{S_N^1 \geq K\}},$$

con N la maturità e K lo strike: il valore a maturità è 1 se si osserva $S_N^1 \geq K$ e nullo in caso contrario.

Un'opzione call sulla media aritmetica dei titoli di prezzo $S^1, \dots, S^d$ ha valore

$$(\bar{S}_N - K)_+, \quad \text{essendo } \bar{S}_N = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_N^i.$$

In questi esempi, il valore a maturità dipende solo da $(S_N^1, \dots, S_N^d)$, cioè dal valore dei prezzi a maturità. Esistono anche opzioni più complicate, il cui valore è funzione di tutta l'evoluzione (traiettoria) del processo dei prezzi fino a maturità, cioè di $((S_n^1, \dots, S_n^d))_{n \leq N}$. Questo tipo di opzioni è detto *path dependent*, cioè dipendente dalla traiettoria. Un esempio tipico sono le opzioni asiatiche: un'opzione asiatica call con maturità N e prezzo di esercizio K sul sottostante di prezzo S^1 ha valore

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j^1 - K \right)_+.$$

Dunque, si tratta di un'opzione call sulla media temporale del prezzo del sottostante $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j^1$. Un altro tipo di opzioni path dependent è dato dalle

opzioni con barriere. Ad esempio, una opzione call up-and-in sul primo bene ha valore

$$(S_N^1 - K)_+ 1_{\{\text{esiste } n \leq N \text{ tale che } S_n \geq U\}}.$$

Qui, oltre alla maturità N e al prezzo di esercizio K , occorre specificare la quantità U : essa è contrattualmente specificata (quindi, deterministica) e rappresenta una barriera superiore. Una call up-and-in è quindi una normale call purché però esista $n \leq N$ tale che $S_n \geq U$, cioè purché il processo S^1 tocchi la barriera U entro l'istante di maturità N . In caso contrario, l'opzione ha valore nullo. Dunque, “up” significa che si lavora con una barriera superiore e “in” significa che l'opzione si attiva se e solo se la barriera viene toccata entro la maturità. Le altre opzioni con barriera sono quindi up-and-out, down-and-in, down-and-out, e per ciascuna si può proporre sia una call che una put, ma anche un'opzione diversa (una digital, un'asiatica etc.). Le cose si possono anche complicare con la doppia barriera, introducendo cioè due barriere U (superiore) e L (inferiore).

Più in generale, possiamo dare la seguente

Definizione 4.5.1. Un'opzione europea di maturità N è caratterizzata dal suo valore h , detto anche *payoff*, che si suppone essere una v.a. non negativa e $\mathcal{F}_N$ -misurabile.

A titolo di esempio, scriviamo il payoff h delle opzioni sopra riportate:

$$\begin{aligned} \text{call:} \quad & h = (S_N^1 - K)_+; \\ \text{put:} \quad & h = (K - S_N^1)_+; \\ \text{digital:} \quad & h = 1_{S_N^1 \geq K}; \\ \text{call su media aritmetica:} \quad & h = (\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_N^i - K)_+; \\ \text{call asiatica:} \quad & h = (\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j^1 - K)_+; \\ \text{call up-and-in:} \quad & h = (S_N^1 - K)_+ 1_{\{\text{esiste } n \leq N \text{ tale che } S_n \geq U\}}; \\ \text{put up-and-out:} \quad & h = (K - S_N^1)_+ 1_{\{\text{per ogni } n \leq N, S_n < U\}}. \end{aligned}$$

In ogni caso, h è una v.a. non negativa e $\mathcal{F}_N$ -misurabile, perché è funzione dei prezzi fino a maturità N e quest'ultimi sono $\mathcal{F}_N$ -misurabili.

L'obiettivo ora è quello di trovare il giusto prezzo delle opzioni. A tale scopo, di fondamentale importanza è la seguente

Definizione 4.5.2. Un'opzione europea h si dice *replicabile* se esiste una strategia ammissibile ϕ tale che $V_N(\phi) = h$, cioè il cui valore finale del portafoglio è pari al payoff dell'opzione.

Osservazione 4.5.3. Se il mercato è privo di arbitraggio, perché un'opzione europea sia replicabile basta richiedere $V_N(\phi) = h$ per qualche strategia autofinanziante ϕ . In sostanza, in assenza di arbitraggio se $V_N(\phi) = h$ per una strategia autofinanziante ϕ allora ϕ è ammissibile. Infatti, ripetendo le

argomentazioni dell'Osservazione 4.4.6, in assenza di arbitraggio $((\tilde{V}_n(\phi))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala, per ogni misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$ e per ogni strategia autofinanziante ϕ . Quindi, se $V_N(\phi) = h \geq 0$ allora

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*((1+r)^{-N} h | \mathcal{F}_n) \geq 0$$

perché $(1+r)^{-N} h \geq 0$. Quindi anche $\tilde{V}_n(\phi) \geq 0$ e $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni n e dunque ϕ è anche ammissibile.

Definizione 4.5.4. Un mercato si dice *completo* se ogni opzione è replicabile.

L'ipotesi di completezza del mercato è piuttosto restrittiva ed inoltre, a differenza della nozione di arbitraggio, non ha un chiaro significato finanziario. Tuttavia, studieremo nel prosieguo mercati completi, perché questa richiesta garantisce lo sviluppo di una teoria matematica piuttosto semplice che consente di studiare e calcolare il prezzo e la copertura delle opzioni (e questa è senz'altro una buona motivazione!).

Il teorema che segue, noto come il *secondo teorema fondamentale dell'asset pricing*, caratterizza il concetto di completezza del mercato quando ci si trovi in assenza di arbitraggio:

Teorema 4.5.5. *Un mercato privo di arbitraggio è completo se e solo se esiste un'unica misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^*$, ovvero un'unica misura di probabilità $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ e tale che i prezzi scontati dei titoli rischiosi sono $\mathbb{P}^*$ -martingale.*

Dimostrazione. Prima parte: assumiamo che il mercato sia privo di arbitraggio e completo e dimostriamo che esiste un'unica misura equivalente di martingala.

Il Teorema 4.4.5 garantisce l'esistenza di una misura di martingala equivalente. Supponiamo ne esistano due: $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$. Indichiamo con $\mathbb{E}_i$ la media valutata sotto $\mathbb{P}_i$, $i = 1, 2$. Il Corollario 4.4.6 garantisce che, per ogni strategia autofinanziante ϕ , il valore scontato del portafoglio $\tilde{V}_n(\phi)$ è una $\mathbb{P}_i$ -martingala. In particolare, poiché la v.a. $V_0(\phi)$ è $\mathcal{F}_0$ -misurabile e dunque costante,

$$\mathbb{E}_1(\tilde{V}_N(\phi)) = V_0(\phi) = \mathbb{E}_2(\tilde{V}_N(\phi)).$$

Poiché il mercato è anche completo, per ogni v.a. $h \geq 0$ esiste una strategia autofinanziante ϕ tale che $\tilde{V}_N(\phi) = (1+r)^{-N} V_N(\phi) = (1+r)^{-N} h$. Dunque

$$\mathbb{E}_1((1+r)^{-N} h) = \mathbb{E}_2((1+r)^{-N} h)$$

per ogni v.a. h non negativa, che sia $\mathcal{F}_N$ -misurabile. Ora, poiché per ipotesi $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, possiamo scegliere $h = (1+r)^N 1_A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, ottenendo

$$\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A) \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{F},$$

da cui segue che $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

Seconda parte: supponiamo l'assenza di arbitraggio e, per assurdo, che il mercato non sia completo; dimostriamo che non esiste una sola misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^*$.

Se il mercato non è completo, esiste almeno un'opzione di payoff h che non è replicabile. Inoltre, poiché il mercato è privo di arbitraggio, esiste una misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^*$.

Al variare di $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ processo predicibile su $\mathbb{R}^d$ e di V_0 v.a. $\mathcal{F}_0$ -misurabile, sia $\widetilde{\mathcal{U}}$ l'insieme delle v.a. della forma

$$\widetilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) = V_0 + \sum_{j=1}^N \left(\phi_n^1 \Delta \widetilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \Delta \widetilde{S}_n^d \right).$$

Per ogni $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ processo predicibile su $\mathbb{R}^d$ e per ogni V_0 v.a. $\mathcal{F}_0$ -misurabile, la Proposizione 4.3.6 garantisce l'esistenza di un processo predicibile $(\phi_n^0)_n$ tale che $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ è una strategia autofinanziante e $U_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) = 1/\beta_n \widetilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) = V_N(\phi)$. Abbiamo quindi le seguenti conseguenze.

- $h \cdot (1+r)^{-N} \notin \widetilde{\mathcal{U}}$ e quindi $\widetilde{\mathcal{U}}$ è un sottoinsieme stretto dell'insieme $\mathbb{R}^\Omega$ delle v.a. su $(\Omega, \mathcal{F})$. Infatti, per ipotesi h non è replicabile: non esiste alcuna strategia autofinanziante ϕ tale che $V_N(\phi) = h$ (si veda anche l'Osservazione 4.5.3). Poiché abbiamo visto che $V_N(\phi) = U_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0)$, segue che h non è della forma $U_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0)$, cioè $h \notin \widetilde{\mathcal{U}}$.
- Poiché $(\widetilde{V}_n(\phi))_n$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala (Osservazione 4.4.6), $\mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(V_0)$, quindi possiamo dire

$$\mathbb{E}^*(\widetilde{U}) = \mathbb{E}^*(V_0) \text{ per ogni } \widetilde{U} = \widetilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) \in \widetilde{\mathcal{U}}. \quad (4.7)$$

Ora, definiamo su $\mathbb{R}^\Omega$ il seguente prodotto scalare²

$$\mathbb{R}^\Omega \times \mathbb{R}^\Omega \ni (X, Y) \mapsto \mathbb{E}^*(XY),$$

dove $\mathbb{E}^*$ denota, al solito, l'aspettazione sotto $\mathbb{P}^*$. Allora, essendo $\widetilde{\mathcal{U}}$ un sottoinsieme stretto di $\mathbb{R}^\Omega$, esiste un elemento $\bar{X} \in \Omega$ non nullo ortogonale a $\widetilde{\mathcal{U}}$:

$$\mathbb{E}^*(\bar{X} \widetilde{U}) = 0 \text{ per ogni } \widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}. \quad (4.8)$$

Poiché in particolare $\widetilde{U} = 1 \in \widetilde{\mathcal{U}}$ (basta prendere $\phi_n^i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, d$ e $n = 0, 1, \dots, N$ e $V_0 = 1$), da (4.8) si ha

$$\mathbb{E}^*(\bar{X}) = 0. \quad (4.9)$$

²La verifica che si tratta effettivamente di un prodotto scalare è immediata.

Ora, definiamo

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{\bar{X}(\omega)}{2\|\bar{X}\|_\infty}\right) \mathbb{P}^*(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega,$$

dove si è posto $\|\bar{X}\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |\bar{X}(\omega)|$, e osserviamo che:

1. $\mathbb{P}^{**}$ è una misura di probabilità: $\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ per ogni ω (perché $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ e $1 + \bar{X}(\omega)/(2\|\bar{X}\|_\infty) > 0$) e, ricordando la (4.9),

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} \bar{X}(\omega) \mathbb{P}^*(\{\omega\}) \\ &= 1 + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \mathbb{E}^*(\bar{X}) = 1; \end{aligned}$$

2. $\mathbb{P}^{**}$ è equivalente a $\mathbb{P}^*$: abbiamo visto in 1. che $\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$;
3. $\mathbb{P}^{**}$ è diversa da $\mathbb{P}^*$, perché $\bar{X}$ è non nulla;
4. posto $\mathbb{E}^{**}$ la media sotto $\mathbb{P}^{**}$, per ogni $\tilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ si ha

$$\mathbb{E}^{**}(\tilde{U}) = \mathbb{E}^*(V_0) \text{ per ogni } \tilde{U} = \tilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) \in \widetilde{\mathcal{U}}.$$

Infatti, tenendo presente (4.7) e (4.8),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{**}(\tilde{U}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{U}(\omega) \mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{U}(\omega) \mathbb{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{U}(\omega) \bar{X}(\omega) \mathbb{P}^*(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{E}^*(\tilde{U}) + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \mathbb{E}^*(\tilde{U} \bar{X}) = \mathbb{E}^*(V_0). \end{aligned}$$

Riassumendo: abbiamo determinato una misura di probabilità $\mathbb{P}^{**}$ diversa da $\mathbb{P}^*$ ma equivalente a $\mathbb{P}^*$ tale che (si prenda nel punto 4. $\tilde{U} = \tilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) \in \widetilde{\mathcal{U}}$ con $V_0 = 0$)

$$\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{j=1}^N \left(\phi_n^1 \Delta \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \Delta \tilde{S}_n^d\right)\right) = 0$$

per ogni processo predicibile $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$. La Proposizione 3.2.6 assicura che $(\tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d)$ è una $\mathbb{P}^{**}$ -martingala. Ciò prova che esistono due diverse misure di martingala equivalenti, e la dimostrazione è completata. $\square$

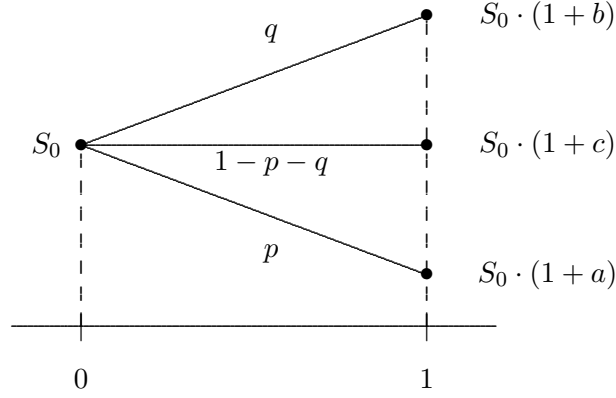


Figura 4.2: Il modello trinomiale ad un periodo

Esempio 4.5.6. [Modello binomiale a un periodo: completezza] Torniamo all'Esempio 4.4.8: supponiamo $d = 1$ (cioè un solo attivo) e che vi sia un solo periodo temporale, durante il quale il prezzo dell'attivo può crescere di due fattori. Usando le notazioni dell'Esempio 4.4.8, si sta supponendo

$$S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot (1 + a) & \text{con probabilità} = p \\ S_0 \cdot (1 + b) & \text{con probabilità} = 1 - p \end{cases}$$

dove S_0 (deterministico) è il prezzo iniziale. Si tratta di un modello completo? La risposta è sì: come sottolineato nell'Esempio 4.4.8, p^* dà l'unica misura di martingala equivalente.

Esempio 4.5.7. [Modello trinomiale a un periodo] Proviamo a complicare il modello binomiale, inserendo un'altra possibilità di salto per il prezzo dell'attivo. Supponiamo quindi che $d = 1$ e che vi sia un solo periodo temporale durante il quale il prezzo dell'attivo possa crescere di tre fattori (si veda la Figura 4.2):

$$S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot (1 + a) & \text{con probabilità} = p \\ S_0 \cdot (1 + c) & \text{con probabilità} = 1 - p - q \\ S_0 \cdot (1 + b) & \text{con probabilità} = q \end{cases}$$

dove S_0 (deterministico) è il prezzo iniziale, $p, q > 0$ e tali che $p + q < 1$. Problema: è un modello senza arbitraggio? È completo?

Come mostrato in figura, supponiamo a, b, c tali che $-1 < a < c < b$ e, analogamente al modello binomiale, è naturale prendere $\Omega = \{1 + a, 1 + b, 1 + c\}$. Procediamo ancora come nel modello binomiale: occorre determinare una coppia p^* e q^* tali che $p^*, q^* > 0$ e $p^* + q^* < 1$ e tali che

$$\mathbb{E}^*((1 + r)^{-1} S_1) = S_0,$$

essendo $\mathbb{E}^*$ la media sotto la probabilità $\mathbb{P}^*$ definita da: $\mathbb{P}^*(\{1+a\}) = p^*$, $\mathbb{P}^*(\{1+b\}) = q^*$ e $\mathbb{P}^*(\{1+c\}) = 1 - p^* - q^*$. Ora, $\mathbb{E}^*(S_1) = S_0(1+a)p^* + S_0(1+b)q^* + S_0(1+c)(1-p^*-q^*)$, dunque dev'essere

$$(1+a)p^* + (1+b)q^* + (1+c)(1-p^*-q^*) = 1+r,$$

o equivalentemente

$$p^*a + q^*b + (1-p^*-q^*)c = r.$$

Si tratta di una equazione lineare nelle incognite p^* e q^* soggette ai vincoli $p^*, q^* > 0$ e $p^* + q^* < 1$. In particolare, si tratta di una combinazione lineare convessa dei punti a , b e c : al variare dei coefficienti p^* , q^* e $1 - p^* - q^*$ si ottiene tutto l'intervallo di estremi (esclusi) $\min(a, b, c) = a$ e $\max(a, b, c) = b$. Dunque, tale equazione ha soluzione se e solo se $r \in (a, b)$: questo modello è privo di arbitraggio se e solo se $a < r < b$. In tal caso, possiamo anche dedurre che non c'è completo: se infatti esiste una soluzione dell'equazione sopra scritta, allora ne esistono infinite. In altre parole, esistono infinite misure di martingala equivalenti, cioè il modello non è completo.

Supponiamo ora che il nostro modello di mercato sia privo di arbitraggio e completo, dunque esiste un'unica misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^*$. Sia h un'opzione, con maturità N , cioè una v.a. non negativa e $\mathcal{F}_N$ -misurabile. Allora esiste una strategia autofinanziante (ammissibile) ϕ che replica l'opzione, cioè tale che h è il valore finale del portafoglio associato a ϕ :

$$V_N(\phi) = h.$$

Inoltre, il valore scontato $\tilde{V}_n(\phi)$ di $V_N(\phi)$ è una $\mathbb{P}^*$ -martingala. Di conseguenza,

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*\left((1+r)^{-N} h\right),$$

e più in generale $\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n)$, che si può riscrivere, per $n = 0, 1, \dots, N$,

$$V_n(\phi) = \mathbb{E}^*\left((1+r)^{-(N-n)} h | \mathcal{F}_n\right). \quad (4.10)$$

La strategia ϕ prende il nome di *strategia replicante l'opzione* ed il portafoglio $V_n(\phi)$ ad essa associata è detto *portafoglio replicante*.

La (4.10) dice che il valore del portafoglio replicante è univocamente determinato, in ogni istante, dalla maturità N e dal payoff h . Inoltre, la (4.10) quantifica la ricchezza che necessita avere al tempo n per avere (replicare) h a maturità N . È quindi naturale stabilire il *prezzo dell'opzione* al tempo n pari alla quantità definita in (4.10).

In altre parole, se all'istante iniziale il compratore dà al venditore un ammontare pari a

$$\mathbb{E}^*\left((1+r)^{-N} h\right)$$

(cioè, al valore in (4.10) con $n = 0$) e se il venditore segue la strategia replicante ϕ , allora al tempo N è in grado di generare una quantità di denaro pari ad h , ossia al valore dell'opzione. In altre parole, seguendo questa strategia il venditore è in grado di coprire esattamente l'opzione.

Chi compra l'opzione deve quindi spendere un ammontare di denaro pari a $\mathbb{E}^*((1+r)^{-N} h)$. Colui che invece vende l'opzione, per coprirsi da eventuali perdite, deve possedere un portafoglio dato da $\mathbb{E}^*((1+r)^{-(N-n)} h \mid \mathcal{F}_n)$, il quale, a sua volta, si costruisce seguendo una strategia di copertura ϕ .

Se si interviene nel contratto ad un istante n qualsiasi, facendo considerazioni analoghe possiamo dire che il giusto prezzo dell'opzione al tempo n è

$$\mathbb{E}^*((1+r)^{-(N-n)} h \mid \mathcal{F}_n)$$

Ora, la strategia di copertura è un oggetto fondamentale. Al momento, sappiamo che esiste ma fino ad ora non è stato possibile determinarla, né caratterizzarla in qualche modo. Comunque, nel prossimo paragrafo introdurremo un modello (discreto) in cui sarà possibile calcolare esplicitamente la copertura delle opzioni call e put.

Infine, osserviamo che il calcolo del prezzo di un'opzione coinvolge esclusivamente la misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^*$, e non quella originaria $\mathbb{P}$. Avremmo quindi potuto sviluppare la teoria esclusivamente considerando uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ su cui sia definita una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$. In altre parole, si può non citare mai la misura $\mathbb{P}$, che poi rappresenta la vera probabilità sul mercato finanziario.

Concludiamo il paragrafo ritrovando (cfr Esempio 4.4.7), a partire dalla formula del prezzo, la formula di parità call/put: se C_n e P_n sono rispettivamente il prezzo al tempo n di una call e di una put con uguale maturità N e stesso prezzo di esercizio K , allora, in un mercato privo di arbitraggio e completo, vale la seguente relazione:

$$C_n - P_n = S_n^1 - K(1+r)^{-(N-n)}, \quad (4.11)$$

Infatti, dalla (4.10) segue che

$$\begin{aligned} C_n &= \mathbb{E}^*((1+r)^{-(N-n)}(S_N^1 - K)_+ \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{e} \\ P_n &= \mathbb{E}^*((1+r)^{-(N-n)}(K - S_N^1)_+ \mid \mathcal{F}_n), \end{aligned}$$

dove $\mathbb{P}^*$ denota l'unica misura equivalente di martingala. Allora,

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*[(S_N^1 - K)_+ - (K - S_N^1)_+ \mid \mathcal{F}_n] = \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^*(S_N^1 - K \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= (1+r)^{-(N-n)} ((1+r)^N \mathbb{E}^*(\tilde{S}_N \mid \mathcal{F}_n) - K) = \\ &= (1+r)^{-(N-n)} ((1+r)^N \tilde{S}_n^1 - K) = S_n^1 - K(1+r)^{-(N-n)}, \end{aligned}$$

cioè la formula di parità.