Capitolo 1

Introduzione alla finanza

In questi primi paragrafi vedremo alcune nozioni elementari e introduttive. Da un punto di vista matematico si tratta di rivedere cose già note sulle proporzioni, più un po' di terminologia finanziaria.

1.1 Tassi d'interesse

Supponiamo di aprire un conto corrente versando un capitale pari a x. Indichiamo con $r \cdot 100\%$ il tasso d'interesse annuo che viene corrisposto. Quindi se, ad esempio $r = 0.05$, ciò corrisponde, nel linguaggio corrente ad un interesse annuo del $0.05 \cdot 100\% = 5\%$.

Alla fine dell'anno il valore del capitale sarà pari a

$$x + xr = x(1 + r)$$

Si dice che viene corrisposto un *interesse semplice* se negli anni successivi l'interesse viene calcolato sempre sul capitale iniziale x. Nella realtà è quello che succede se alla fine di ogni anno ritiriamo la porzione di capitale maturata, cioè xr. Dopo n anni, il capitale investito ad un interesse semplice pari a r avrà prodotto un capitale finale pari a

$$x + \underbrace{xr + \cdots + xr}_{n \text{ volte}} = x(1 + nr)$$

Si parla invece di *interesse composto* quando alla fine di ogni anno l'interesse viene calcolato sul capitale fino ad allora maturato. Dunque il capitale sarà pari a

$$\begin{array}{ll}
x(1+r) & \text{alla fine del primo anno} \\
x(1+r)^2 & \text{alla fine del secondo anno} \\
\vdots & \vdots \\
x(1+r)^n & \text{alla fine dell'}n\text{-esimo anno}
\end{array}$$

È quindi evidente la differenza tra interesse semplice (il capitale cresce linearmente) e composto (il capitale cresce esponenzialmente). Nella realtà, vengono applicati interessi composti (e quasi mai semplici).

Ovviamente si può procedere anche al contrario: se una quantità vale y all'anno n e se è applicato un tasso (composto) annuale r, il valore ad oggi, detto *valore attualizzato*, è

$$x = y(1+r)^{-n}.$$

Esercizio 1.1. Supponiamo di possedere un titolo "perpetuo", che paga c Euro alla fine di ogni anno (cioè, riscuoteremo c Euro alla fine dell'anno n, per ogni $n = 1, 2, \ldots$). Supponendo che il tasso di interesse composto sia r, qual è il valore attualizzato di questo titolo?

Talvolta una banca versa l'interesse maturato alla fine di un periodo più piccolo di un anno. Se l'interesse annuo resta del $r \cdot 100\%$, allora se nell'anno sono previsti k periodi, il capitale sarà

$$\begin{array}{lr}
x(1+\frac{r}{k}) & \text{alla fine del primo periodo} \\
x(1+\frac{r}{k})^2 & \text{alla fine del secondo periodo} \\
\vdots & \vdots \\
x(1+\frac{r}{k})^k & \text{alla fine dell'anno (k-esimo periodo)}
\end{array}$$

e su n anni si ottiene la seguente ricapitalizzazione:

$$x\Big(1+\frac{r}{k}\Big)^{nk}.$$

Se facciamo tendere il numero di periodi nei quali l'anno è suddiviso all'infinito (cioè, $k \to \infty$), evidentemente otteniamo che il capitale alla fine dell'n-esimo anno sarà uguale a

$$\lim_{k\to\infty} x\Big(1+\frac{r}{k}\Big)^{nk} = x\mathrm{e}^{r\,n}$$

In questo caso, r prende il nome di *tasso istantaneo di interesse.* Ricordando che il limite $x(1+\frac{r}{k})^k \uparrow \mathrm{e}^r$ è crescente (qui infatti $r > 0$), si ha che $x\mathrm{e}^{r\,n}$ è l'estremo superiore dei capitali che si possono ottenere su n anni con un interesse composto pari a r quando si suddivida l'anno in più periodi. Inoltre più sono i periodi, maggiore è il guadagno.

Esercizio 1.2. La banca A offre, per il vostro conto corrente, un interesse del 3% semestrale; la banca B offre un interesse del 2% trimestrale. Qual è l'interesse annuale? A quale banca affidereste i vostri risparmi per sei mesi? E per un anno?

Esercizio 1.3. Supponiamo di aver bisogno di 100mila Euro, ad esempio per acquistare una casa, e per questo chiediamo un mutuo ad una banca. La banca offre un mutuo di 15 anni, ad un interesse mensile dello 0.6%, da ripagare con rate mensili. Qual è il valore di ciascuna rata? In più, la banca chiede una tassa di 600 Euro per l'apertura del mutuo, un'altra tassa di 400 Euro per ispezionare la casa ed infine l'1% dell'ammontare di denaro richiesto. A conti fatti, qual è l'effettivo tasso di interesse applicato?

Esercizio 1.4. Un individuo ritiene che andrà in pensione tra 20 anni e decide di mettere in banca un certo ammontare di denaro alla fine di ogni mese, diciamo A, per i prossimi $12 \times 20 = 240$ mesi. Egli vuol essere sicuro che l'investimento gli garantisca una rendita di 1000 Euro mensili, per i successivi 30 anni. Assumendo che la banca gli dia un tasso di interesse del 6% annuale, composto mensilmente, qual è il valore di A?

Esercizio 1.5. Supponiamo di poter depositare del denaro ad un interesse istantaneo del 10% annuo. Quanto occorre aspettare per raddoppiare il patrimonio?

Esercizio 1.6. Una banca propone due investimenti, che paga alla fine dell'anno i, per $i = 1, 2, 3$. Il primo, garantisce le quote 100, 140, 131 Euro; il secondo, 90, 160, 120 Euro. È possibile dire quale dei due investimenti sia migliore pur non conoscendo il tasso di interesse?

1.2 Alcuni aspetti dei mercati finanziari

Vediamo di descrivere alcuni aspetti dei mercati finanziari. Non andremo troppo in profondità, ma quando si modellizzano dei problemi reali, occorre averne un minimo di conoscenza. Vedremo poi che alcune nozioni tipiche dei mercati finanziari hanno una controparte interessante in matematica.

1.2.1 Vendita allo scoperto

Una cosa che può succedere in un mercato finanziario, è che qualcuno venda qualcosa che non possiede. Ciò è possibile in due modi diversi. Ad esempio giocando sul fatto che talvolta gli acquisti si regolano alla fine della giornata. Nel film "Un posto per due" i protagonisti sanno che il succo concentrato di frutta calerà di prezzo durante la giornata. Quindi, al mattino entrano nel mercato vendendo a prezzo elevato (non possiedono neanche una goccia...), mentre al pomeriggio lo acquistano a prezzo basso. Alla chiusura compensano quello venduto con quello acquistato e si intascano la differenza.

Un'altra possibilità, per un investitore, consiste nel rivolgersi ad un broker (cioè un agente di cambio) che prende "in prestito" dal portafoglio di un altro cliente un pacchetto di titoli. Quando l'investitore avrà effettuato l'operazione che gli interessa restituirà il pacchetto, che verrà "rimesso al suo posto".

In gergo finanziario, colui che acquista il titolo prende una *posizione lunga*, mentre chi lo vende prende una *posizione corta.*

Come si può immaginare si tratta sempre di operazioni un po' rischiose e la vendita allo scoperto non è sempre una operazione consentita, oppure è comunque regolamentata. Noi considereremo un mercato finanziario in cui essa è permessa. Questo sarà anzi un elemento importante, che implicherà delle considerazioni teoriche importanti.

1.2.2 Arbitraggio

Per introdurre il concetto (fondamentale) di arbitraggio, cominciamo con un esempio.

Supponiamo che l'11 febbraio 2004 si osservino sul mercato dei cambi i tassi seguenti

Euro/USD	1.267
Euro/Yen	133.85
USD/Yen	106.75

Uno speculatore potrebbe fare l'operazione seguente: con 1 USD compra 106.75 Yen, che cambia in $106.75/133.85 = 0.798$ Euro e poi in $0.798 \cdot 1.267 = 1.011$ USD. Avrebbe quindi guadagnato 1.1 centesimi di USD. Anzi avrebbe potuto vendere allo scoperto il primo dollaro. Avrebbe quindi avuto un guadagno certo senza neanche avere bisogno di un capitale iniziale, cioè avrebbe fatto un arbitraggio.

In generale, si chiama *arbitraggio* un'operazione finanziaria che

- non necessita di un capitale iniziale;
- non può in nessun modo dare luogo ad una perdita e, con probabilità strettamente positiva, dà luogo ad un guadagno.

Nella realtà situazioni di arbitraggio si presentano, ma naturalmente tendono a riassorbirsi molto velocemente. Nella situazione immaginata precedentemente, inevitabilmente ci sarebbe stato un aumento di richieste di cambi vendite di USD contro Yen e questo avrebbe fatto rapidamente scendere il cambio USD/Yen, facendo sparire la possibilità di arbitraggio. Spesso questo ruolo di riequilibrio è svolto dalle banche centrali

Per questo motivo, in un modello di mercati finanziari si fa spesso l'ipotesi che l'arbitraggio non sia possibile. Questa è una ipotesi chiave per stabilire il prezzo di un bene. Ad esempio, dando per corretti i valori del cambio Euro/Yen e Euro/USD, quanto deve valere il cambio USD/Yen perché non ci sia arbitraggio?

Se indichiamo con x questo valore, occorrerà che facendo l'operazione

$$\text{USD} \to \text{Yen} \to \text{Euro} \to \text{USD}$$

non ci deve essere guadagno. Ora con questa operazione 1USD viene trasformato in

$$1\,\text{USD} = x\,\text{Yen} = x \cdot \frac{1}{133.85}\,\text{Euro} = x \cdot \frac{1}{133.85} \cdot 1.267\,\text{USD}.$$

Questa quantità è uguale a 1 se e solo se $x = 133.85/1.267 = 105.64$. Questo dunque deve essere il cambio USD/Yen perché non ci sia arbitraggio.

Giusto per curiosità, i valori dei cambi indicati sopra sono quelli reali alle 14h02 dell'11 febbraio 2004, per quanto riguarda i cambi USD/Euro e Euro/Yen. Invece il cambio USD/Yen era pari a 105.55. La lieve differenza con il valore ottenuto con il criterio dell'arbitraggio deriva dal fatto che nelle operazioni di cambio descritte sopra avevamo implicitamente supposto che non ci fossero spese di transazione. Si sa invece che passare da una valuta all'altra comporta delle spese.

1.2.3 Le proprietà del mercato finanziario

Nel resto di questo corso considereremo un mercato finanziario in cui valgono certe proprietà, che non si trovano in realtà nei mercati reali. Ciò si giustifica con la necessaria semplicità che si richiede ad un primo approccio ai problemi. Molte di queste ipotesi si possono oggi eliminare (vedi ad esempio l'assenza di spese di transazione), ma al prezzo di un trattamento matematico molto più elaborato.

Le proprietà che saranno richieste sono le seguenti.

1. Esiste nel mercato un tipo di investimento senza rischio, detto *titolo non rischioso* o *obbligazione* oppure *bond* (del tipo reddito da interesse versato per capitale depositato su un conto corrente), con un tasso, eventualmente istantaneo, costante, che indicheremo r. Questo investimento è calcolato mediante:

   - un interesse composto, nel qual caso al tempo t il valore di un investimento iniziale pari a x è dato da $x_t = x(1+r)^t$, oppure
   - un interesse composto a tempo continuo, dunque una somma pari a x, dopo un tempo t viene rivalutata a $x_t = x\mathrm{e}^{rt}$.

   Come vedremo, nel seguito useremo entrambi i modelli per l'evoluzione del titolo non rischioso. Per il momento, scegliamo il secondo tipo.

2. È possibile prendere in prestito somme di denaro allo stesso tasso e con le stesse regole.

3. I costi di transazione (spese per i cambi di valuta, acquisto o vendita di azioni o obbligazioni...) sono uguali a 0.

4. È permessa la vendita allo scoperto.

5. Sono permesse operazioni riguardanti frazioni di beni. Ad esempio è possibile acquistare 0.63 azioni di una società.

1.3 Prodotti finanziari, prodotti derivati

Nei mercati finanziari sono presenti molti prodotti (valute, azioni, obbligazioni...). Esistono però anche degli strumenti finanziari il cui valore è determinato da quello di altri prodotti. Questi ultimi si chiamano *prodotti derivati*. Il questo paragrafo vedremo due degli esempi principali.

1.3.1 Contratti forward e futures

Esempio 1.3.1. *(Contratti forward)* Supponiamo che una industria americana sappia, oggi 16 gennaio 2004, che dovrà pagare una fattura in Euro all'inizio di marzo 2004. Ciò espone la società ad un rischio, legato alle fluttuazioni dei cambi. Per proteggere le società da questo genere di rischi esistono i *contratti forward*. Con questo contratto una seconda società s'impegna a fornire la merce al tempo indicato, *ad un prezzo fissato oggi*. Il prezzo di un contratto forward con scadenza 4 marzo 2004 è di 1.2462. Comperando questo contratto forward, la società si impegna a pagare alla data del 4 marzo 2004 una prefissata somma di Euro al tasso di cambio di 1.2462. Se il cambio Euro/Dollaro alla data indicata sarà superiore a 1.2462, la società che ha acquistato un contratto forward ci avrà guadagnato, se invece il cambio risulterà più basso, ci avrà rimesso. In ogni caso però si sarà garantita da improvvise oscillazioni dei cambi.

Un *contratto forward* è quindi un impegno sottoscritto da due parti, A e B, in cui B si impegna oggi a consegnare ad A alla data futura T una merce (frumento, valuta, azioni...) ad un prezzo F fissato oggi. Da parte sua, A si impegna ad acquistare da B la merce pattuita e a pagarla F.

Un po' di nomenclatura.

- La data di scadenza T (4 marzo 2004 nell'Esempio 1.3.1) si chiama la *data di maturità*.

- Il prezzo stabilito F (1.2462 nell'esempio precedente) si chiama il *prezzo di consegna*.

- Il prezzo corrente di un contratto forward si chiama il *prezzo forward*. Alla data di emissione prezzo di consegna e prezzo forward coincidono. Supponiamo però, acquistato un contratto forward come nell'Esempio 1.3.1, alla data del 10 febbraio, a seconda che il cambio sia salito o sceso, il prezzo di un contratto forward sarà salito o sceso di conseguenza.

- Il prezzo del bene sottostante il contratto (cioè il valore del cambio, nell'Esempio 1.3.1), si chiama il *prezzo spot.*
- Nel gergo del milieu, si dice che la società A che acquista un contratto forward prende una *posizione lunga*, mentre chi lo vende, B, prende una *posizione corta*, con una terminologia simile a quella che abbiamo visto per le vendite allo scoperto.

Precisiamo un paio di cose.

1. Entrare in un contratto forward non richiede nessun esborso di denaro, ma vincola la società all'acquisto della "merce" pattuita, alla data di maturità ed al prezzo di esercizio pattuito.
2. I contratti forward non sono regolamentati in borsa, ma possono comunque essere oggetti di scambio.

Alla fine del contratto è naturale considerare la quantità

$$S_T - F \tag{1.1}$$

Qui T è la data di maturità, S_T è il prezzo del sottostante a maturità, e F è il prezzo di consegna. Questa quantità rappresenta il guadagno (la perdita, se negativa...) del detentore del contratto forward, rispetto alla strategia ingenua che consisteva nell'attendere il 4 marzo ed acquistare gli Euro sul mercato. Il guadagno/perdita della società che ha preso una posizione corta sarà invece

$$F - S_T \tag{1.2}$$

I contratti futures sono simili ai forward, con la differenza che sono regolamentati dalla borsa, che impone una serie di obblighi, tra cui l'apertura di speciali conti correnti su cui le due controparti devono versare delle somme a garanzia. Tralasceremo di descrivere questi dettagli, concentrandoci sui contratti forward che coinvolgono meno dettagli di tecnica finanziaria e, soprattutto, sulle opzioni.

Vediamo ora come l'ipotesi di assenza di arbitraggio consenta di stabilire il giusto prezzo di consegna di un contratto forward. Consideriamo quindi un bene, di cui indichiamo con S_t il prezzo al tempo t. Qual è il prezzo di consegna per un contratto forward, di maturità T emesso a $t = 0$? Il criterio di assenza di arbitraggio impone che il prezzo di consegna F debba essere uguale a

$$S_0 \mathrm{e}^{rT}$$

dove r indica al solito il tasso d'interesse istantaneo di un conto corrente. Vediamo perché.

Infatti, supponiamo $F < S_0 \mathrm{e}^{rT}$; allora un investitore potrebbe vendere allo scoperto una unità del bene in questione al prezzo odierno, S_0, versarlo in banca e simultaneamente sottoscrivere un contratto forward al prezzo F. A maturità ritira dalla banca il capitale maturato, che vale ora $S_0 e^{rT}$. Può ora onorare il contratto acquistando una unità di sottostante al prezzo F e restituirla per compensare la vendita allo scoperto. Il bilancio dell'operazione è $S_0 e^{rT} - F > 0$. Questa operazione realizza un guadagno strettamente positivo, senza rischio e senza bisogno di disporre di un capitale; si tratta quindi di un arbitraggio.

Viceversa se $F > S_0 e^{rT}$ si può costruire una operazione di arbitraggio in maniera simile. Si vende un contratto forward con prezzo di consegna F e simultaneamente si prende in prestito in banca un ammontare S_0 con il quale si acquista una unità di sottostante. A maturità si cede l'unità di sottostante, incassando la quantità F. Occorre ora restituire alla banca il capitale preso a prestito, che ora vale $S_0 e^{rT}$. Il bilancio dell'operazione è ancora positivo: $F - S_0 e^{rT} > 0$.

1.3.2 Opzioni

Le opzioni sono un tipo di prodotti derivati diverso dai contratti forward e futures. Una opzione è un contratto che dà il diritto (ma non l'obbligo) a chi lo detiene di acquistare (o vendere, a seconda del tipo d'opzione) un bene (il *sottostante*) ad una data prefissata (la data di *maturità*) e ad un prezzo prefissato (il prezzo di *esercizio* o *strike*).

Le opzioni che danno diritto ad acquistare si chiamano *call*, quelle che danno diritto a vendere si chiamano *put*.

In realtà ci sono molti tipi di opzione. Noi ci occuperemo dei due tipi principali.

- Le opzioni *europee*, per le quali si ha il diritto di esercitare l'opzione unicamente al tempo di maturià.

- Le opzioni *americane*, per le quali il detentore ha il diritto di esercitare l'opzione in qualunque istante compreso tra il tempo di emissione ed il tempo di maturià.

Esempio 1.3.2. Il prezzo dell'opzione call sull'Euro al Chicago Board of Trade al 16 gennaio 2004, con maturità T =4 Marzo e prezzo di esercizio $K = 1.26$ era di 0.017USD. Questo significa che l'acquirente, pagando il prezzo di 0.017USD acquisisce il diritto ad acquistare un euro al prezzo di 1.26USD il 4 Marzo. Quindi se il cambio Euro/USD sarà inferiore a $K = 1.26$, il detentore dell'opzione rinuncerà ad esercitare l'opzione ed acquisterà gli Euro che gli servono sul mercato. Avrà quindi pagato inutilmente il prezzo dell'opzione. Se invece il cambio Euro/USD il 4 Marzo sarà superiore al prezzo di esercizio 1.26, eserciterà l'opzione e si procurerà la valuta di cui ha bisogno al prezzo di esercizio. In ogni caso, mediante l'opzione si sarà garantito da un aumento dei cambi.

Indichiamo con S_t il prezzo del sottostante al tempo t. Immaginando di avere a che fare con un'opzione europea, al tempo $t = T$ la società che ha venduto l'opzione deve pagare, nel caso di una call europea, un prezzo pari a

$$C_T = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0) \tag{1.3}$$

Infatti, se $S_T < K$, l'opzione non viene esercitata e la società non deve pagare nulla. Se invece $S_T > K$, allora per onorare l'opzione occorre sborsare un ammontare pari a $S_T - K$ per ogni unità di sottostante. La quantità (1.3) si chiama il *payoff* dell'opzione, e rappresenta quindi la quantità di denaro che deve sborsare colui che cede il diritto di opzione.

Per una put europea, si vede subito che il payoff è

$$P_T = (K - S_T)_+ \tag{1.4}$$

Vedremo più tardi come si esprime il payoff delle opzioni americane. Sia per le opzioni put che per le call, il payoff è della forma $\Phi(S_T)$, dove

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (x - K)_+ \quad \text{per le opzioni call} \\ \Phi(x) &= (K - x)_+ \quad \text{per le opzioni put} \end{aligned}$$

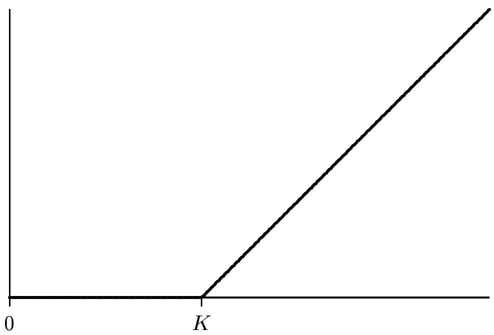

Figura 1.1 Grafico per il payoff di una opzione call.

Nel gergo finanziario:

- chi acquista un'opzione call o una unità di sottostante si dice che prende una posizione *lunga*;
- chi vende una opzione call oppure una unità di sottostante si dice che prende una posizione *corta*.

Le opzioni, come i contratti forward, sono state concepite per ridurre i rischi degli operatori finanziari. Nell'Esempio 1.3.2, lo strumento dell'opzione veniva usato per garantirsi di acquisire la valuta di cui si ha bisogno ad un prezzo controllato (sicuramente inferiore o uguale al prezzo di esercizio). Le opzioni possono però anche essere usate a scopo speculativo. Sempre nel quadro dell'Esempio 1.3.2, un operatore avrebbe potuto considerare una speculazione

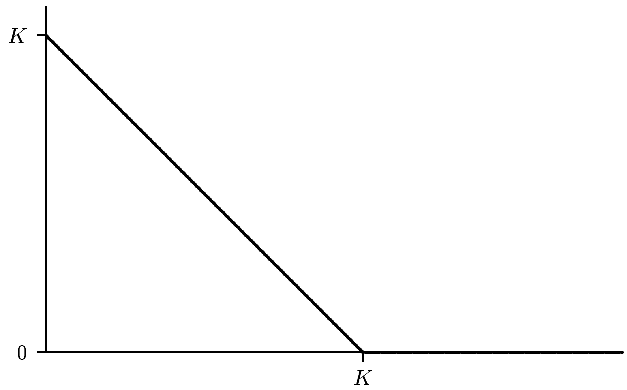

Figura 1.2 Grafico per il payoff di una opzione put. Rispetto all'opzione call c'è una notevole differenza: il payoff di una opzione put è limitato.

in cui acquista delle opzioni, sperando che il prezzo del sottostante a maturità sia superiore a quello d'esercizio, in maniera da lucrare la differenza. In genere si deve considerare che le speculazioni sulle opzioni sono ad alto rischio. Possono cioè produrre grossi guadagni, ma è anche molto elevato il rischio di perdere la totalità della somma investita. Torneremo più tardi su questo punto.

1.3.3 A cosa servono i derivati?

I derivati si possono usare essenzialmente per due scopi diversi:

- per coprire il rischio, oppure
- a scopo speculativo.

Qui "coprire il rischio" non vuole dire nasconderlo, ma ridurlo. Abbiamo già visto nell'Esempio 1.3.1 questo aspetto: con un contratto forward una compagnia si può garantire di disporre ad un tempo futuro fissato della valuta, o delle materie prime di cui ha bisogno. Oppure, pensando ad una opzione call oppure alla vendita di un contratto forward (oppure entrare corti su un contratto forward, come si dice) una società può garantirsi di vendere un suo prodotto ad un prezzo fissato. Le opzioni forniscono comunque anche uno strumento per gli speculatori, cioè per quegli operatori che cercano investimenti a rischio elevato, che possono cioè produrre grossi guadagni ma anche grosse perdite.

Esempio 1.3.3. Supponiamo che il prezzo di un'azione al 4 gennaio 2003 sia pari a 39 Euro e che il costo di una opzione call con uno strike di 40 Euro e maturità 4 aprile sia di 2 Euro. Uno speculatore che pensa che il prezzo dell'azione aumenterà nel futuro, ha a disposizione due strategie, supponendo un capitale di 3900 Euro:

- può acquistare 100 azioni, oppure
- può acquistare 1950 opzioni call.

Indichiamo con S_T il valore dell'azione alla maturità $T = 4$ aprile e vediamo quanto vale il portafoglio V_T dell'investitore in ciascune delle due strategie considerate.

- Nel primo caso il valore è semplicemente $V_T = 100 \cdot S_T$.
- Nel secondo, ci sono due possibilità. Se $S_T > 40$, allora egli eserciterà l'opzione, acquisendo le azioni al prezzo di 40 Euro, che poi venderà al prezzo di mercato S_T. Il suo capitale sarà quindi pari a $1950 \cdot (S_T - 40)$. Se invece il prezzo dell'azione S_T sarà sotto i 40 Euro, l'opzione non verrà esercitata e l'investitore avrà perso il capitale investito. In conclusione il valore finale dell'investimento in questo secondo caso è di $V_T = 1950 \cdot (S_T - 40)_+$.

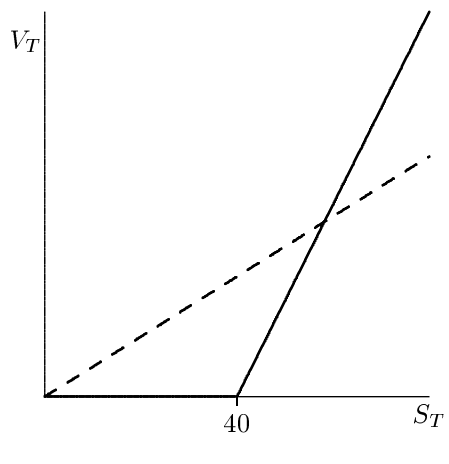

Figura 1.3 Grafico del valore dell'investimento V_T in funzione del prezzo S_T; in tratteggio, il valore di V_T nella prima strategia.

È evidente che il secondo tipo d'investimento è molto più sensibile alle variazioni del prezzo S_T. Ad esempio, se $S_T = 44$, il valore del capitale per ciascuno dei due investimenti sarà rispettivamente

$$V_T = 4400 \quad \text{e} \quad V_T = 4 \cdot 1950 = 7800$$

Invece se fosse $S_T = 41$, allora avremmo 4100 e 1950. Soprattutto, se fosse $x \leq 40$, il valore del secondo investimento sarebbe uguale a 0. Dunque i derivati, che sono stati introdotti allo scopo di ridurre i rischi, possono anche essere usati a scopo speculativo. Un investitore con un obiettivo di questo tipo potrà apprezzare le grosse possibilità di guadagno che essi offrono, ma dovrà tenere conto che il rischio di subire grosse perdite è molto elevato.

Per quanto riguarda le opzioni, il problema del calcolo del prezzo non è così semplice da affrontare. Scopo principale di queste note e del corso, è appunto il calcolo del prezzo delle opzioni.

1.4 Soluzioni

Soluzione dell'esercizio 1.1. Se alla fine dell'n-esimo anno avremo c, allora il valore ad oggi di questa quantità è $c(1+r)^{-n}$. Dunque, il valore attualizzato di questo titolo è

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(1+r)^{-n} = \frac{c}{1+r} \frac{1}{1-1/(1+r)} = \frac{c}{r}.$$

Soluzione dell'esercizio 1.2. Se immaginiamo che in un anno vi siano k rivalutazioni, ciascuna con tasso $r_{\text{per.}}$, allora l'interesse annuale è $r_{\text{ann.}} = (1+r_{\text{per}})^k - 1 \simeq k \cdot r_{\text{per}}$ (quest'ultima approssimazione vale perché in genere i tassi sono percentuali non troppo elevate). Dunque, l'interesse annuale è $r_{\text{ann.}} \simeq 3 \times 2\,\% = 6\%$ nel primo caso (anno diviso in 2 periodi) e $r_{\text{ann.}} \simeq 2 \times 4\,\% = 8\%$ nel secondo (anno diviso in 4 periodi). Su un solo semestre, il tasso applicato è 3% nel primo caso e $[(1+0.02)^2 - 1] \times 100\% \simeq 2 \times 2\,\% = 4\%$ nel secondo. Evidentemente, è più vantaggioso il secondo caso.

Soluzione dell'esercizio 1.3. Osserviamo che in totale occorre far fronte a $12 \times 15 = 180$ rate. Sia A il valore di ciascuna rata. Per calcolare A, basta imporre che il valore attualizzato dei soldi che nei 15 anni saranno versati alla banca sia uguale alla somma presa in prestito. Ora, il valore attualizzato dell'n-esima rata è $A \cdot \rho^n$, con $\rho = (1+0.006)^{-1}$, dunque dev'essere

$$\sum_{n=1}^{180} A\,\rho^n = 100000,$$

da cui segue che

$$A = 100000 \frac{1-\rho}{\rho(1-\rho^{180})} = 910.05$$

Quindi, un prestito di 100mila Euro in 15 anni ad un tasso mensile dello 0.06% costa 910.05 Euro di rata mensile. Dovendo però pagare varie tasse, in realtà il prestito è pari a $100.000 - 600 - 400 - 1000 = 98.000$ Euro. Dunque, detto r_m l'effettivo tasso di interesse mensile, dev'essere

$$\sum_{n=1}^{180} 910.05\,(1+r_m)^{-n} = 98000,$$

cioè

$$\frac{1 - 1/(1+r_m)^{180}}{r_m} = 107.69.$$

Risolvendo numericamente (tenendo conto del fatto che sappiamo che $r > 0.006$), si ottiene

$$r_m = 0.00627.$$

In termini di annualità, la banca dice di praticare un interesse annuale pari a $r = (1.006)^{12} - 1 \simeq 7.4\%$ mentre in realtà il tasso effettivo è $r = (1.00627)^{12} - 1 \simeq 7.8\%$.

Soluzione dell'esercizio 1.4. L'interesse mensile è $0.06/12 \times 100\% = 0.005 \times 100\%$. Poniamo $\alpha = 1 + 0.005 = 1.005$. Calcoliamo il patrimonio tra vent'anni: poiché il valore tra 20 anni del k-esimo versamento è $A\,\alpha^{240-(k-1)}$, alla fine l'individuo accumulerà

$$\sum_{k=1}^{240} A\,\alpha^{240-(k-1)} = A\,\alpha\,\frac{\alpha^{240} - 1}{\alpha - 1}.$$

Questa cifra deve rappresentare il valore attualizzato di 1000 Euro al mese per 30 anni. Dunque, posto $\beta = 1/1.005 = 1/\alpha$, dev'essere

$$A\,\alpha\,\frac{\alpha^{240} - 1}{\alpha - 1} = \sum_{k=0}^{359} 1000\,\beta^k = 1000\,\frac{1 - \beta^{360}}{1 - \beta}.$$

Sostituendo ad esempio $\alpha = 1/\beta$, si ottiene

$$A = 1000\,\beta^{240}\,\frac{1 - \beta^{360}}{1 - \beta^{240}} = 360.99$$

Ciò significa che, ad un tasso del 6% annuo, versando 361 Euro per vent'anni sarà possibile prelevare 1000 Euro al mese per i successivi trent'anni.

Soluzione dell'esercizio 1.5. Se x denota il denaro investito, dopo un tempo di T anni il valore è $x\,\mathrm{e}^{r\,T}$. Dunque, dev'essere $2x = x\,\mathrm{e}^{r\,T}$, cioè

$$T = \frac{1}{r}\,\log 2 = 6.9 \text{ anni}.$$

Soluzione dell'esercizio 1.6. Sia r il tasso di interesse annuale. Alla fine dei tre anni, i due investimenti varranno:

$$\begin{aligned} I_1 &= 100(1+r)^2 + 140(1+r) + 131 \text{ e} \\ I_2 &= 90(1+r)^2 + 160(1+r) + 120. \end{aligned}$$

Il primo investimento è preferibile se e solo se $I_1 > I_2$, cioè, posto $x = 1 + r$,

$$100x^2 + 140x + 131 > 90x^2 + 160x + 120.$$

Risolvendo, si ottiene che questa disuguaglianza è vera per ogni valore di x, dunque il primo investimento è senz'altro preferibile.