

Calcolo delle Probabilità, II modulo

A.A. 2002/2003

Lucia Caramellino

1. Cenni di teoria della misura. Algebre e σ -algebre; σ -algebra di Borel. Spazi di misura. π -systems, unicità dell'estensione; Teorema di Carathéodory [senza dimostrazione]. Misura di Lebesgue. Disuguaglianze elementari. Proprietà di convergenza monotona delle misure.
[Cap. 1 di Williams. Esercitazione I.]

2. Spazi di probabilità e variabili aleatorie. Modello base: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Eventi. Esempi. Proprietà vere "q.c.". $\limsup$ e $\liminf$ di eventi. Primo lemma di Borel-Cantelli. Funzioni misurabili e proprietà (misurabilità della somma, del prodotto etc. di funzioni misurabili, misurabilità delle funzioni composte, misurabilità del $\liminf$ e $\limsup$ di funzioni misurabili etc.). Variabili aleatorie (v.a.). σ -algebra generata da una v.a. Legge e funzione di distribuzione di una v.a. Proprietà. Rappresentazione di Skorohod ed esistenza di v.a. con funzione di distribuzione o con legge data.
[Cap. 2 e 3 (escluso §14) di Williams. Esercitazione II.]

3. Indipendenza. Indipendenza di: σ -algebre, variabili aleatorie, eventi. Secondo lemma di Borel-Cantelli.
[Cap. 4, §1,2,3, di Williams. Esercitazione III.]

4. Cenni di integrazione. Integrale sulle classi SF^+ (funzioni semplici non negative) e $(m\Sigma)^+$ (funzioni misurabili non negative). Teorema di convergenza monotona. Lemma di Fatou e "controparte" (per misure finite). Linearità. Lo spazio $\mathcal{L}^1$ delle funzioni integrabili. Teorema di convergenza dominata. Integrale su sottoinsiemi misurabili. Misure assolutamente continue. Teorema di Radon-Nicodym [senza dimostrazione]. Variabili aleatorie assolutamente continue e densità di probabilità.
[Cap. 5 (esclusi §10, 11) di Williams. Esercitazione IV.]

5. Valore atteso. Definizione. Disuguaglianze: Markov, Jensen, Hölder, Schwarz, Minkowski. Spazi $\mathcal{L}^p$: monotonia della $\|\cdot\|_p$; inclusione degli spazi $\mathcal{L}^p$; completezza. Lo spazio (di Hilbert) $\mathcal{L}^2$. Varianza e covarianza. Relazione tra covarianza nulla ed indipendenza. La media di una funzione di v.a. come integrale rispetto alla sua legge.
[Cap. 6 (escluso §11) di Williams. Esercitazione V.]

6. Convergenza e leggi dei Grandi Numeri. Indipendenza ed aspettazione del prodotto. Convergenza di successioni di v.a.: in probabilità, q.c. e in $\mathcal{L}^p$. Implicazioni e controesempi. Disuguaglianza di Chebycev e legge debole dei Grandi Numeri. Legge forte dei Grandi Numeri e, come conseguenza, teorema di Weierstrass sull'approssimazione di funzioni continue tramite polinomi.

[Cap. 7 di Williams. Appunti distribuiti. Esercitazione VI.]

7. Misure prodotto e leggi congiunte. Spazio prodotto e σ -algebra prodotto. Misurabilità. Misura prodotto. Teorema di Fubini e teorema di Tonelli [senza dimostrazione]. Legge congiunta e funzione di distribuzione congiunta, proprietà e studio delle marginali. Funzione di densità congiunta. Teorema del cambio di variabile [senza dimostrazione] e utilizzo per il calcolo della densità (congiunta) di una funzione di v.a.

[Cap. 7 (escluso §7) di Williams. Esercitazione VII, VIII.]

8. Funzione caratteristica. Definizione e proprietà elementari. Corrispondenza uno a uno tra leggi, funzioni di distribuzione e funzioni caratteristiche: formula di Inversione di Lévy. Esempi: legge gaussiana, esponenziale, esponenziale-doppia, di Cauchy.

[Cap. 8 di Williams. Esercitazione IX.]

9. Convergenza debole e Teorema del Limite Centrale. Definizione di convergenza debole e in legge; relazioni con gli altri tipi di convergenza. Rappresentazione di Skorohod per una successione di funzioni di distribuzione che converge debolmente. Teorema di Helly-Bray. Condizione di *tightness*. Teorema di Convergenza di Lévy. Comportamento di una funzione caratteristica in un intorno dell'origine. Teorema del Limite Centrale.

[Cap. 9 (esclusi §5,6) di Williams. Esercitazione IX, X.]

TESTI CONSIGLIATI

- D. Williams: *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- L. Caramellino: *Appunti su convergenza e leggi dei Grandi Numeri*.
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_0203/CP1_II.htm, 2003.
- L. Caramellino: *Esercitazioni di Calcolo delle Probabilità, II modulo*.
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_0203/CP1_II.htm, 2003.

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- P. Baldi: *Appunti del corso di Calcolo delle Probabilità, II modulo, Anno 2000-2001*. www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_0203/CP1_II.htm.
- G.R. Grimmett e D.R. Stirzaker: *Probability and random processes. Problems and solutions (second edition)*. Oxford science publications, 1992
- P. Billingsley: *Probability and measure*. Wiley, 1986.

MODALITÀ D'ESAME

L'esame prevede una prova scritta, con esercizi pratici e domande di tipo teorico. Ulteriori informazioni (ad esempio, prove di esame effettuate in passato) all'indirizzo

http://www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_0203/CP1_II.htm