Secondo esonero
di Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Sia $\{Y_n\}$ una successione di v.a. indipendenti di legge $\mathrm{Un}(0,n)$. Studiare la convergenza (q.c., in probabilità, in L^p e in legge) di $X_n = e^{-Y_n}$.

Esercizio 2. Siano X e Y due v.a. indipendenti di legge $\mathrm{Exp}(1)$ e siano

$$U = X \qquad \text{e} \qquad V = |X - Y|.$$

a) Calcolare la legge di (U, V). Le v.a. U e V sono indipendenti?

b) Sia $Z = \tan(X/Y)$. La terna (U, V, Z) ha densità?

c) Sia $\{(X_k, Y_k)\}_k$ una successione di copie indipendenti di (X, Y). Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=0}^{n} |Y_k - X_k| \geq n + 2\sqrt{n}\Big).$$

Esercizio 3. Sia $\{X_k\}$ una successione di v.a. i.i.d. e positive tali che $\log X_k$ ha media 0 e varianza (finita) σ^2. Studiare la convergenza in legge di $\{Y_n^\alpha\}_n$, dove

$$Y_n^\alpha = \Big(\prod_{k=1}^{n} X_k\Big)^{1/n^\alpha}, \quad \text{con} \quad \alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$$

Esercizio 4. **a)** È vero che se una successione di v.a. converge in legge allora converge in L^p, per qualche p? Ed è vero il viceversa? (Giustificare le risposte.)

b) La funzione caratteristica: descrivere le proprietà che ritenete particolarmente importanti (giustificando la scelta - eventuali dimostrazioni sono ben accette).

c) Descrivere e dare alcuni esempi di applicazione della proprietà di *tightness*.

Soluzioni

Esercizio 1 Studiamo dapprima la convergenza in legge: $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(e^{-Y_n} \leq x) = 0$ se $x \leq 0$ e per $x > 0$

$$F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \geq -\ln x) = \int_{-\ln x}^{\infty} \frac{1}{n}\, 1\!\!1_{(0,n)}\, dt,$$

da cui si ottiene

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < e^{-n} \\ \dfrac{n + \ln x}{n} & \text{se } e^{-n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{e si ha} \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Quindi, detta F_0 la f.d. della v.a. $X = 0$ q.c., $F_n(x) \to F_0(x)$ per ogni x tale che $\Delta F_0(x) \neq 0$, ovvero $X_n \to 0$ in legge, per $n \to \infty$.

Poiché la v.a. limite è costante, si ha anche $X_n \to 0$ in probabilità. Studiamo la convergenza q.c.: fissato $\delta > 0$, si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = 0 \text{ se } \delta \geq 1 \text{ e per } \delta < 1,\ \mathbb{P}(|X_n| > \delta) = -\ln \delta / n.$$

Allora, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ non converge per ogni $\delta > 0$ e anzi, per alcuni valori di δ si ha $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \infty$. Poiché le X_n sono indipendenti, da BC2 possiamo dedurre che la successione non converge q.c.

Studiamo infine la convergenza in L^p a 0:

$$\mathbb{E}(|X_n^p|) = \mathbb{E}(e^{-pY_n}) = \int_0^n \frac{1}{n}\, e^{-py}\, dy = \frac{1 - e^{-np}}{n} \to 0 \text{ se } n \to \infty,$$

dunque $X_n \to 0$ in L^p per ogni p.

Esercizio 2 a) Usiamo il TCV: poniamo

$$\begin{aligned} A_1 = \{(x,y)\,:\, x > y\} \quad &\text{e} \quad A_2 = \{(x,y)\,:\, x < y\}, \\ \varphi_1(x,y) = (x, x-y),\ (x,y) \in A_1 \quad &\text{e} \quad \varphi_2(x,y) = (x, y-x),\ (x,y) \in A_2, \end{aligned}$$

così che $(U,V) = \varphi_1(X,Y)\, 1\!\!1_{(X,Y)\in A_1} + \varphi_2(X,Y)\, 1\!\!1_{(X,Y)\in A_2}$ q.c. Le funzioni inverse di φ_1 e φ_2 sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \psi_1(u,v) = (u, u-v),\ (u,v) \in \varphi_1(A_1) = \{(u,v)\,:\, v > 0\}, \quad \text{e} \\ \psi_2(u,v) = (u, u+v),\ (u,v) \in \varphi_2(A_2) = \{(u,v)\,:\, v > 0\}. \end{aligned}$$

Allora, detta $f_{U,V}$ la densità congiunta di U e V,

$$f_{U,V}(u,v) = \sum_{k=1}^{2} f_{X,Y} \circ \psi_k(u,v)\, |\mathrm{det} J_{\psi_k}(u,v)|\, 1\!\!1_{(u,v)\in\varphi_k(A_k)},$$

dove $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}\, 1\!\!1_{x>0,y>0}$ è la densità congiunta di X e Y. Svolgendo, si ottiene:

$$f_{U,V}(u,v) = e^{-2u+v}\, 1\!\!1_{u>v>0} + e^{-2u-v}\, 1\!\!1_{u>0,v>0}.$$

U e V non sono indipendenti perché la densità congiunta non si fattorizza nel prodotto di due funzioni l'una dipendente da u e l'altra da v.

b) Osserviamo che se $X/Y \in (\pi/4, \pi/2)$ allora $X/Y = \mathrm{arctg} Z > 0$. Quindi: $X > Y$, $V = X - Y$ e, essendo $U = X$, si ha $Z = \tan(U/(U-V))$. In altre parole, si ha

$$\{X/Y \in (\pi/4, \pi/2)\} \subset \Big\{Z = \tan \frac{U}{U-V}\Big\} = \{(U,V,Z) \,:\, (U,V,Z) \in A\},$$
$$\text{dove } A = \Big\{(u,v,z) \,:\, z = \tan \frac{u}{u-v}\Big\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3).$$

Ora, $\mathrm{Leb}_3(A) = 0$ e $\mathbb{P}((U,V,Z) \in A) \geq \mathbb{P}(X/Y \in (\pi/4, \pi/2)) > 0$, da cui segue che la terna (U,V,Z) non ha densità di probabilità.

c) Posto $V_k = |Y_k - X_k|$, ovviamente le V_k sono indipendenti e hanno tutte la stessa legge di V, la cui densità è data da

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\, du = e^{-v}\, 1\!\!1_{v>0},$$

cioè $V_k \sim \mathrm{Exp}(1)$, quindi $\mu = \mathbb{E}(V_k) = 1$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(V_k)$. Allora, usando il TLC si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=0}^{n} |Y_k - X_k| \geq n + 2\sqrt{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{k=0}^{n}(V_k - \mu)}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \geq 2\Big) = 1 - \Phi(2),$$

dove Φ denota la f.d. di una gaussiana standard.

Esercizio 3 Studiamo la convergenza di $Z_n^\alpha = \log Y_n^\alpha$. Intanto, si ha

$$Z_n^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} W_k, \quad \text{dove } W_k = \log X_k, \text{ con } W_k \text{ indipendenti, } \mathbb{E}(W_k) = 0, \mathrm{Var}(W_k) = \sigma^2.$$

Ora, se $\alpha = 1$ ci troviamo nella situazione tipica della LGN: $Z_n^1 \to \mathbb{E}(W_1) = 0$ q.c., per $n \to \infty$. Se invece $\alpha = 1/2$, usiamo il TLC:

$$Z_n^{1/2} = \sigma \times \frac{\sum_{k=1}^{n}(W_k - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \to \mathrm{N}(0, \sigma^2), \quad \text{in legge per } n \to \infty.$$

Per $\alpha = 1/4$ non c'è convergenza perché la successione $Z_n^{1/4}$ non è *tight*. Infatti, osservando che $Z_n^{1/4} = n^{1/4} \cdot Z_n^{1/2}$, fissato $M > 0$ e per n grande, si ha

$$\mathbb{P}(|Z_n^{1/4}| \leq M) = \mathbb{P}(|Z_n^{1/2}| \leq n^{-1/4} M) \simeq \mathbb{P}(|Z| \leq n^{-1/4} M),$$

dove qui Z denota una v.a. di legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Ora, se n è grande, $n^{-1/4}M$ è vicino allo 0, quindi $\mathbb{P}(|Z| \leq n^{-1/4}M)$ è piccolo. In altre parole, non è vero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $M > 0$ tale che

$$\inf_n \mathbb{P}(|Z_n^{1/4}| \leq M) \geq 1 - \varepsilon,$$

ovvero la successione $\{Z_n^{1/4}\}_n$ non è *tight*.

Infine, osservando che $Y_n^\alpha = e^{Z_n^\alpha}$ e che la funzione $g(z) = e^z$ è continua, quanto sviluppato sopra consente di dedurre che:

- $\alpha = 1$: $Y_n^1 \to e^0 = 1$ q.c. per $n \to \infty$ (perché $Z_n^1 \to 0$ q.c. per $n \to \infty$);
- $\alpha = 1/2$: $Y_n^{1/2} \to Y$ in legge per $n \to \infty$, con $Y = e^Z$ e $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ (perché $Z_n^{1/2} \to Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ in legge per $n \to \infty$);
- $\alpha = 1/4$: $Y_n^{1/4}$ non è *tight* (perché $Z_n^{1/4}$ non è *tight*), quindi non c'è convergenza.

Esercizio 4 Si rimanda al libro di testo.