Primo esonero
di Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Siano $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e

$$\mathbb{P}(A) = c \int_A 1\!\!1_{[-1,1]}(x)\, dx, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

1. Determinare c affinché $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia uno spazio si probabilità.
2. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$. Verificare che X è una v.a. e calcolare la legge Λ_X di X.
3. Sia $Z = 1\!\!1_{\mathbb{Q} \cap (0,1)}$. Dire se Z è una v.a.; in caso affermativo, scrivere la sigma algebra $\sigma(Z)$ generata da Z e calcolare la legge Λ_Z di Z.
4. Sia $Y = X^2$. Calcolare la legge Λ_Y di Y. Dire se $\Lambda_X \ll \Lambda_Y$ e/o $\Lambda_Y \ll \Lambda_X$; in caso affermativo, scrivere $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_Y}$ e/o $\frac{d\Lambda_Y}{d\Lambda_X}$.

Esercizio 2. Dimostrare la seguente affermazione: *due v.a. X e Y sono indipendenti se e solo se prese f e g boreliane tali che $f(X)$, $g(Y) \in L^1$ allora $f(X) \cdot g(Y) \in L^1$ e*

$$\mathbb{E}(f(X)\, g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\, \mathbb{E}(g(Y)).$$

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_n$ tale che $\mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = 1/n^2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di $\{X_n\}_n$ a 0.

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare i due lemmi di Borel-Cantelli e verificare, con un controesempio, che il secondo lemma di Borel-Cantelli non vale in generale se si elimina l'ipotesi di indipendenza.

Soluzioni

Esercizio 1. 1. $\mathbb{P}$ è una misura (perché del tipo $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx$, con $f \geq 0$ e Leb-integrabile). Per essere una misura di probabilità, occorre che $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$:

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = c\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{[-1,1]}\,dx = c \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

2. X è la funzione identica, dunque misurabile (per ogni $A \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(A) = A \in \mathcal{B} = \mathcal{F}$) e quindi X è una v.a. Inoltre, per $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega\,:\,\omega \leq x\}) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}\,dx,$$

da cui segue che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Dunque, $F_X'(x)$ esiste per q.o. x e vale $f_X(x) = \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}(x)$, che è la densità uniforme su $[-1,1]$. Dunque, $X \sim \mathrm{Un}(-1,1)$ e, per $A \in \mathcal{B}$, $\Lambda_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx$.

3. Osserviamo che, per $A \in \mathcal{B}$,

$$Z^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} = \mathcal{B} & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A \\ (\mathbb{Q} \cap (0,1))^c \in \mathcal{F} = \mathcal{B} & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ \mathbb{Q} \cap (0,1) \in \mathcal{F} = \mathcal{B} & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ \Omega = \mathbb{R} \in \mathcal{F} = \mathcal{B} & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \in A. \end{cases}$$

Ciò prova che Z è misurabile, quindi è una v.a., ed inoltre che $\sigma(Z) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, avendo posto $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Per quanto riguarda la legge, osserviamo che Z può assumere solo due valori: o 0 oppure 1. Inoltre, essendo $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ un insieme di Leb-misura nulla,

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{Q} \cap (0,1)) = \int_{\mathbb{Q} \cap (0,1)} \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}\,dx = 0$$

Dunque, $Z = 0$ q.c. La sua legge è quindi la delta di Dirac in 0: $\Lambda_Z = \delta_0$, cioè, per $A \in \mathcal{B}$, $\Lambda_Z(A) = 1$ se $0 \in A$ e $\Lambda_Z(A) = 0$ se $0 \notin A$.

4. $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = 0$ se $y \leq 0$. Se invece $y > 0$, si ha:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}(x)\,dx.$$

Quindi, posto $f_Y(y) = F_Y'(y)$, $f_Y(y)$ esiste per q.o. $y \in \mathbb{R}$ e si ha $f_Y(y) = 0$ per $y < 0$ e per $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[-1,1]}(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[-1,1]}(-\sqrt{y})\Big) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[0,1]}(y)$$

È facile verificare che f_Y è in effetti una densità, quindi $\Lambda_Y(A) = \int_A f_Y(y)\,dy$, per $A \in \mathcal{B}$.

Studiamo l'eventuale assoluta continuità tra le misure Λ_X e Λ_Y. Osserviamo che, poiché $1\!\!1_{[0,1]}(y) = 1\!\!1_{[0,1]}(y) \cdot 1\!\!1_{[-1,1]}(y)$, si ha

$$\Lambda_Y(A) = \int_A \frac{1}{2\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[0,1]}(y)\,dy = \int_A \frac{1}{\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[0,1]}(y) \cdot \frac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}(y)\,dy = \int_A \frac{1}{\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[0,1]}(y)\,d\Lambda_X(y),$$

il che prova non solo che $\Lambda_Y \ll \Lambda_X$[1] ma anche che

$$\frac{d\Lambda_Y}{d\Lambda_X}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\, 1\!\!1_{[0,1]}(y).$$

Invece, non è vero che $\Lambda_X \ll \Lambda_Y$: preso, ad esempio, $A = (-1,0)$, si ha $\Lambda_Y(A) = 0$ ma $\Lambda_X(A) > 0$.

Esercizio 2. Supponiamo che X e Y siano indipendenti. Allora, lo sono anche $X_1 = f(X)$ e $Y_1 = g(Y)$, per ogni f e g boreliane. Ora, se le v.a. indipendenti X_1 e Y_1 sono tali che $X_1 \in L^1$ e $Y_1 \in L^1$, allora sappiamo che anche $X_1Y_1 \in L^1$ ed inoltre $\mathbb{E}(X_1Y_1) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_1)$, e la tesi è dimostrata.

Viceversa, prendiamo $A, B \in \mathcal{B}$ e le funzioni $f(x) = 1\!\!1_A(x)$ e $g(y) = 1\!\!1_B(y)$: sono misurabili ed essendo limitate ovviamente $f(X) \in L^1$ e $g(Y) \in L^1$. Ma allora, per ipotesi, si ha $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$. Ora,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(1\!\!1_A(X)1\!\!1_B(Y)) = \mathbb{E}(1\!\!1_{X\in A, Y\in B}) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B),$$

così come $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{P}(X \in A)$ e $\mathbb{E}(g(Y)) = \mathbb{P}(X \in B))$. Ma allora, abbiamo dimostrato che

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B), \qquad \text{per ogni } A, B \in \mathcal{B}$$

e tale proprietà equivale all'indipendenza tra X e Y.

Esercizio 3. Cominciamo con la convergenza in probabilità. Sia $\delta > 0$ e studiamo $\mathbb{P}(|X_n| > \delta)$. Poiché X_n può assumere solo i due valori 0 e n^α, otteniamo facilmente che, <u>per ogni n grande abbastanza</u>,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ \mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{n^2} & \text{se } \alpha > 0, \end{cases}$$

dunque $\mathbb{P}(|X_n| > \delta) \to 0$, per $n \to \infty$, per ogni $\alpha \neq 0$. Se invece $\alpha = 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta < 1 \\ \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^2} & \text{se } \delta > 1, \end{cases}$$

e anche in questo caso $\mathbb{P}(|X_n| > \delta) \to 0$, per $n \to \infty$. Dunque possiamo concludere che $X_n \to 0$ in probabilità, per ogni fissato valore di α. Per la convergenza q.c., abbiamo appena visto che, per ogni $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e <u>per ogni n</u>, $\mathbb{P}(|X_n| > \delta) \le \frac{1}{n^2}$, quindi $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta) \le \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$, dunque $X_n \to 0$ q.c.

Infine, studiamo la convergenza in L^p:

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = n^{\alpha p}\,\frac{1}{n^2} = n^{\alpha p - 2} \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 2/p,$$

dunque $X_n \to 0$ in L^p se e solo se $\alpha < 2/p$.

Esercizio 4. Si rimanda al libro di testo.

[1]Si poteva anche verificare direttamente. Infatti, sia $A \in B$ tale che $\Lambda_X(A) = 0$ Allora dev'essere: o $A \cap [-1,1] = \emptyset$, e in tal caso $\Lambda_Y(A) = 0$, oppure $A \cap [-1,1]$ è un insieme di Leb-misura nulla, e anche in tal caso $\Lambda_Y(A) = 0$.