Prova I
Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Note

Per il recupero del I esonero: esercizi 1, 2, 3, 4 (2 ore a disposizione).

Per il recupero del II esonero: esercizi 5, 6, 7, 8 (2 ore a disposizione).

Appello d'same: un esercizio scelto tra 1 e 2; un esercizio scelto tra 3 e 4; esercizi 5, 6, 7 (3 ore a disposizione).

Esercizio 1. Sia dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove con $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e, per $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = 2 \int_A e^{-2\xi} \mathbb{1}_{\xi > 0} d\xi.$$

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$.

a) Verificare che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità e che X è una v.a., con legge $\text{Exp}(2)$.

b) Posto $Y = \mathbb{1}_{X \in (0,1)} - \mathbb{1}_{X \in \mathbb{N}}$, scrivere $\sigma(Y)$ (= sigma algebra generata da Y) e dire qual è la legge di Y .

Esercizio 2. Siano $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Su $(\Omega, \mathcal{F})$, siano $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ definite da

$$\mathbb{P}_i(A) = \sum_{k \in A} p_i(k), \quad A \subset \Omega, \quad i = 1, 2$$

(con $\mathbb{P}_i(\emptyset) := 0$) dove, per $\rho \in (0, 1)$ e $N \in \mathbb{N}$ fissati,

$$\text{(misura geometrica)} \quad p_1(k) = \rho^k (1 - \rho), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{(misura binomiale)} \quad p_2(k) = \begin{cases} \binom{N}{k} \rho^k (1 - \rho)^{N-k} & \text{se } k = 0, \dots, N \\ 0 & \text{se } k > N \end{cases}$$

a) Verificare che $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono due misure di probabilità.

b) Mostrare che $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ ma che $\mathbb{P}_2 \not\ll \mathbb{P}_1$, e scrivere $\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}$.

Esercizio 3. Media, varianza e covarianza: definizione e significato probabilistico.

Esercizio 4. Dimostrare che il prodotto di due v.a. indipendenti di L^1 è una v.a. di L^1 , con media pari al prodotto delle due medie.

Esercizio 5. Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., ciascuna con densità

$$p(x) = \frac{1}{2x} \mathbb{1}_{e^{-1} < x < e}.$$

Posto $Y_n = \left(\prod_{k=1}^n X_k \right)^{1/n}$ e di $Z_n = \left(\prod_{k=1}^n X_k \right)^{1/\sqrt{n}}$, dimostrare che per ogni $g \in C_b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Y_n)) = g(1) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \int \frac{g(e^z)}{\sqrt{2\pi/3}} e^{-3z^2/2} dz.$$

Esercizio 6. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x, y) = c \sqrt{x^2 + y^2} \mathbb{1}_{x^2 + y^2 \leq 1}$$

a) Calcolare c e la densità congiunta di $U = |X|$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti? E la terna (Y, U, V) ha densità di probabilità?

b) Per $n \geq 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X, Y) . Studiare la convergenza di $\{D_n\}_n$, dove $D_n = \min(R_1, \dots, R_n)$.

Esercizio 7. Enunciare, dimostrare a grandi linee e discutere le applicazioni del teorema di convergenza di Lévy.

Esercizio 8. È vero che se una successione di v.a. converge q.c. allora converge in L^p ? Ed è vero il viceversa? (Giustificare le risposte).

Prova II
Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Sia $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente, limitata e càdlàg, e sia

$$\mu_G((a, b]) := G(b) - G(a), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b.$$

a) Mostrare che esiste un'unica misura μ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tale che $\mu \equiv \mu_G$ sugli intervalli della forma $(a, b]$.

b) Trovare condizioni su G affinché $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ sia uno spazio di probabilità. Se μ è una misura di probabilità, è vero che esiste una v.a. X con legge μ ? E in caso affermativo, che relazione c'è tra G e la funzione di distribuzione F_X di X ?

c) Supponiamo $G(x) = 1 + \int_{-\infty}^x g(t) dt$, con $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \text{Leb})$ fissata e $g(t) \geq 0$ per q.o. t . Verificare che G soddisfa le ipotesi richieste e che in tal caso

$$\mu(A) = \int_A g(t) dt, \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{B}.$$

Dedurre quindi che $\mu \ll \text{Leb}$ e scrivere $\frac{d\mu}{d\text{Leb}}$. Se μ è una misura di probabilità ed è la legge di una v.a. X , è vero che X ha densità? Se sì, quanto vale la densità f_X di X ?

Esercizio 2. Siano $\{X_n\}_n, \{Y_n\}_n$ due successioni di v.a. e X, Y due ulteriori v.a. Dimostrare che

$$\text{se } X_n \xrightarrow{A} X \text{ e } Y_n \xrightarrow{A} Y \text{ allora } X_n + Y_n \xrightarrow{A} X + Y$$

dove " $\xrightarrow{A}$ " denota la convergenza q.c. oppure in probabilità¹ oppure in L^p . Mostrare che lo stesso risultato in generale non vale se " $\xrightarrow{A}$ " = convergenza in legge.

Esercizio 3. Per $n \geq 1$, sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim N(\mu, \sigma_n^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

a) Studiare la convergenza in probabilità, in L^p e in legge della successione $\{X_n\}_n$.

b) Trovare due successioni possibili per $\{\sigma_n^2\}_n$ tali che $\{X_n\}_n$ converge q.c. e $\{X_n\}_n$ non converge q.c. (eventualmente imponendo una condizione di indipendenza sulle X_n)².

Esercizio 4. Siano X e Y due v.a. indipendenti, con legge $\text{Exp}(1)$.

a) Calcolare la densità congiunta e le densità marginali di $U = X + Y$ e $V = X - Y$.

b) Calcolare $\text{Cov}(U, V)$. U e V sono indipendenti?

c) Sia $\{(U_n, V_n)\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. tale che (U_n, V_n) ha la stessa legge di (U, V) . Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n (U_k + V_k - 2) > \sqrt{n}\right).$$

Esercizio 5. a) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

b) La funzione caratteristica: descrivere le proprietà che ritenete particolarmente importanti (giustificando la scelta - eventuali dimostrazioni sono ben accette).

¹Potrebbe essere utile il seguente fatto: se U e V denotano due v.a. allora per ogni $\delta > 0$, $\{|U + V| > \delta\} \subset \{|U| + |V| > \delta\} \subset \{|U| > \delta/2\} \cup \{|V| > \delta/2\}$.

²A tale scopo, potrebbe essere utile la seguente stima (facilmente dimostrabile): se $Z \sim N(0, 1)$, allora per $z \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{P}(|Z| > z) \simeq 2 \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi} z}$$

(o, equivalentemente, $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(|Z| > z)}{2 e^{-z^2/2} / (\sqrt{2\pi} z)} = 1$)

Prova III
Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Sia F una funzione di distribuzione su $\mathbb{R}$. Un punto $m \in \mathbb{R}$ è detto *una mediana* per F se e solo se

$$\lim_{x \uparrow m} F(x) \leq \frac{1}{2} \leq F(m).$$

Dimostrare l'esistenza di almeno una mediana e che l'insieme delle mediane è un insieme chiuso di $\mathbb{R}$. Interpretare il concetto di "mediana".

Esercizio 2. Se $\phi(t)$ denota una funzione caratteristica, dimostrare che anche $\bar{\phi}(t)$, $\phi^2(t)$, $|\phi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche.

Esercizio 3. Sia (X, Y) una coppia di v.a. con densità gaussiana bivariata:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right),$$

dove $\rho \in (-1, 1)$ è fissato.

a) Calcolare, se esiste, la densità congiunta di X e $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ e dedurre che $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho$.

b) Calcolare $\text{Cov}(X, Z)$ e $\text{Cov}(X, Y)$. Studiare l'indipendenza tra X e Z e tra X e Y .

c) Sia Λ_X , Λ_Z e Λ_{X+Z} la legge di X , di Z e di $X + Z$ rispettivamente.

c1) Dire se $\Lambda_X \ll \Lambda_Z$ e in caso affermativo calcolare $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_Z}$.

c2) Dire se $\Lambda_X \ll \Lambda_{X+Z}$ e in caso affermativo calcolare $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_{X+Z}}$.

Esercizio 4. Si consideri una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ in m sotto-intervalli disgiunti di ampiezza positiva $p_1, p_2, \dots, p_m$. L'entropia di questa partizione è data dalla quantità

$$h = - \sum_{i=1}^m p_i \log p_i.$$

Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., con legge $\text{Un}(0, 1)$, e sia $Z_n(i)$ il numero delle v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ che cadono nell' i -esimo intervallo della partizione. Posto

$$R_n = \prod_{i=1}^m p_i^{Z_n(i)},$$

dimostrare che $n^{-1} \log R_n \rightarrow -h$ q.c. per $n \rightarrow \infty$.

Esercizio 5. a) Dimostrare un teorema di rappresentazione di Skorohod e mostrarne qualche interessante esempio di applicazione.

b) Convergenza q.c. e in probabilità: dimostrare eventuali implicazioni e discutere (con controesempi) eventuali non-implicazioni.

Prova IV
Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Sia dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e, per $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \xi e^{-\xi} \mathbb{1}_{\xi > 0} d\xi.$$

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$.

a) Verificare che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità e che X è una v.a., con legge $\Gamma(2, 1)$.

b) Posto $Y = \mathbb{1}_{X \in (0,1)} - \mathbb{1}_{X \in \mathbb{N}}$, verificare che Y è una v.a. Scrivere $\sigma(Y)$ (= sigma algebra generata da Y) e dire qual è la legge di Y .

Esercizio 2. Siano X e Y v.a. i.i.d., con legge $\text{Un}(0, 1)$, e siano $U = \min(X, Y)$ e $V = \max(X, Y)$.

a) Calcolare, se esistono, la densità congiunta di U e V e le rispettive densità marginali.

b) Le v.a. U e V sono indipendenti?

c) Per $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare $\mathbb{P}(U + \alpha > V)$.

d) Sia $W = Y - X$. La v.a. (su $\mathbb{R}^3$) (U, V, W) ha densità?

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. e sia f una funzione continua. Dimostrare che

$$\text{se } X_n \xrightarrow{A} X \text{ allora } f(X_n) \xrightarrow{A} f(X)$$

dove " $\xrightarrow{A}$ " denota la convergenza q.c. oppure in legge. Mostrare che lo stesso risultato in generale non vale se " $\xrightarrow{A}$ " = convergenza in L^p .

Esercizio 4. a) Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. con legge $\text{Exp}(\lambda)$. Dimostrare che $S_n := \sum_{k=1}^n X_k \sim \Gamma(n, \lambda)$.

b) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$. Dimostrare che, per ogni $\lambda > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty g\left(\frac{t}{n}\right) t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = g(1/\lambda).$$

Esercizio 5. Dimostrare il Teorema del Limite Centrale e discutere almeno un esempio di applicazione.

Prova V
Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Siano $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Su $(\Omega, \mathcal{F})$, siano $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ definite da

$$\mathbb{P}_i(A) = \int_A p_i(x) dx, \quad A \subset \Omega, \quad i = 1, 2$$

dove, fissato $\lambda > 0$,

$$p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0} \quad (\text{misura esponenziale})$$
$$p_2(x) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{0 < x < \lambda} \quad (\text{misura uniforme})$$

- a) Verificare che $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono due misure di probabilità.
- b) Dire se $\mathbb{P}_i \ll \mathbb{P}_j$ ed in caso affermativo scrivere $\frac{d\mathbb{P}_i}{d\mathbb{P}_j}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., con legge $\text{Un}(-1, 1)$. Siano

$$U_n = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{e} \quad V_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Studiare la convergenza q.c., in probabilità, in legge e in L^1 delle successioni $\{U_n\}_n$, $\{V_n\}_n$ e $\{U_n + V_n\}_n$.

Esercizio 3. Sia (X, Y) una coppia di v.a. con densità gaussiana bivariata:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right),$$

dove $\rho \in (-1, 1)$ è fissato.

a) Calcolare, se esiste, la densità congiunta di X e $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ e dedurre che $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho$.

b) Calcolare $\text{Cov}(X, Z)$ e $\text{Cov}(X, Y)$. Studiare l'indipendenza tra X e Z e tra X e Y .

c) Dire se (X, Y, Z) è una v.a. assolutamente continua su $\mathbb{R}^3$; in caso affermativo, calcolarne la densità di probabilità.

Esercizio 4. a) Siano $1 \leq p < q$. È vero che $L^p \subset L^q$? È vero che $L^q \subset L^p$? (Giustificare le risposte).

b) La funzione caratteristica: descrivere le proprietà che ritenete particolarmente importanti (giustificando la scelta - eventuali dimostrazioni sono ben accette).

c) Enunciare e dimostrare in grandi linee i lemmi di Borel-Cantelli; dare un esempio di applicazione che ritenete significativo (giustificare!) nel Calcolo delle Probabilità.