Prova scritta
di Calcolo delle Probabilità, II modulo
a.a. 2002/2003

Esercizio 1. Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia Λ_X la sua legge.

a) Dare la definizione di Λ_X e di media di X .

b) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borel misurabile. Dimostrare che $f(X)$ è ancora una v.a. e che $f(X) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se e solo se $f(x) \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \Lambda_X)$, e in tal caso

$$\int_{\Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Lambda_X(dx).$$

Esercizio 2. Siano X e Y v.a. i.i.d., con legge $\text{Un}(0, 1)$, e siano $U = \min(X, Y)$ e $V = \max(X, Y)$.

a) Calcolare, se esistono, la densità congiunta di U e V e le rispettive densità marginali.

b) Le v.a. U e V sono indipendenti? E posto $W = Y - 2X$, la v.a. (su $\mathbb{R}^3$) (U, V, W) ha densità?

c) Sia $\{(X_k, Y_k)\}_k$ una successione di copie indipendenti di (X, Y) . Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(3 \sum_{k=1}^{n^2} \max(X_k, Y_k) > 2n^2 + xn^\alpha\right)$$

con $x \in \mathbb{R}$ fissato e $\alpha = 1, 2$.

Esercizio 3. a) Per $n \in \mathbb{N}$, sia $X_n \sim \text{Un}(1/n, 2/n, \dots, 1)$. Studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$.

b) Usando **a)**, dimostrare che, per ogni funzione $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx.$$

Esercizio 4. a) Sia φ la funzione caratteristica di una v.a. $X \in L^2$. Dimostrare che $\text{Var}(X) = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2$.

b) Sia $\varphi(\theta) = e^{-\theta^3}$. Dimostrare che φ non può essere una funzione caratteristica di una v.a. di L^2 .

Soluzioni

Esercizio 1 Si rimanda al libro di testo.

Esercizio 2 a) Si ha: $(U, V) = \phi(X, Y)$, con $\phi(x, y) = (\min(x, y), \max(x, y))$ che però non è iniettiva. Poniamo allora

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) : x < y\} & \text{e per } (x, y) \in A_1, & \quad \phi_1(x, y) = (x, y); \\ A_2 &= \{(x, y) : x > y\} & \text{e per } (x, y) \in A_2, & \quad \phi_2(x, y) = (y, x). \end{aligned}$$

Le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 sono ora regolari e con inversa regolare:

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) &:= \phi_1^{-1}(u, v) = (u, v) & \text{per } (u, v) \in \phi_1(A_1) = \{(u, v) : u < v\}; \\ \psi_2(u, v) &:= \phi_2^{-1}(u, v) = (v, u) & \text{per } (u, v) \in \phi_2(A_2) = \{(u, v) : u < v\}. \end{aligned}$$

Osservando che $\mathbb{P}((X, Y) \in A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1$, usando il TCV si ottiene

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y} \circ \psi_1(u, v) |\det J_{\psi_1}(u, v)| \mathbb{1}_{(u,v) \in \phi_1(A_1)} \\ &\quad + f_{X,Y} \circ \psi_2(u, v) |\det J_{\psi_2}(u, v)| \mathbb{1}_{(u,v) \in \phi_2(A_2)} \\ &= 2 \mathbb{1}_{0 < u < v < 1}. \end{aligned}$$

Calcoliamo le due densità marginali:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int f_{U,V}(u, v) dv = 2 \mathbb{1}_{0 < u < 1} \int_u^1 dv = 2(1 - u) \mathbb{1}_{0 < u < 1}, \\ f_V(v) &= \int f_{U,V}(u, v) du = 2 \mathbb{1}_{0 < v < 1} \int_0^v du = 2v \mathbb{1}_{0 < v < 1}. \end{aligned}$$

b) No, U e V non sono indipendenti: la densità congiunta non si fattorizza nel prodotto delle densità marginali. E la terna (U, V, W) non ha densità congiunta. Infatti, osserviamo che $W > 0$ equivale a $Y - 2X > 0$, cioè $Y > 2X > X$ q.c. In tal caso allora $U = X$ e $V = Y$, quindi $W = V - 2U$. In altre parole, si ha $\{Y > 2X\} = \{W > 0, W = V - 2U\}$. Ciò suggerisce di prendere

$$A = \{(u, v, w) : w > 0, w = v - 2u\}.$$

Infatti, si ha $\text{Leb}_3(A) = 0$ ma

$$\mathbb{P}((U, V, W) \in A) = \mathbb{P}(W > 0, W = V - 2U) = \mathbb{P}(Y > 2X) > 0,$$

quindi la terna (U, V, W) non ha densità.

c) Posto $V_k = \max(X_k, Y_k)$, le V_k sono indipendenti ed hanno tutte legge uguale alla legge di V . Osserviamo inoltre che

$$\mathbb{E}(V) = \int_0^1 2v^2 dv = \frac{2}{3} = \mu, \quad \text{Var}(V) = \int_0^1 2v^3 dv - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} = \sigma^2.$$

Ora, supponiamo $\alpha = 1$. In tal caso, possiamo scrivere

$$\mathbb{P}\left(3 \sum_{k=1}^{n^2} \max(X_k, Y_k) > 2n^2 + xn\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n^2} (V_k - \mu)}{\sqrt{\sigma^2 n^2}} > x/(3\sigma)\right).$$

Il limite si può quindi calcolare usando il TLC:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(3 \sum_{k=1}^{n^2} \max(X_k, Y_k) > 2n^2 + xn\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n^2} (V_k - \mu)}{\sqrt{\sigma^2 n^2}} > x/(3\sigma)\right) \\ &= 1 - \Phi(x/(3\sigma)) = 1 - \Phi(x\sqrt{2}), \end{aligned}$$

essendo Φ la f.d. di una gaussiana standard. Se invece $\alpha = 2$, basta usare la LGN. Infatti, in tal caso

$$\mathbb{P}\left(3 \sum_{k=1}^{n^2} \max(X_k, Y_k) > 2n^2 + xn^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} (V_k - \mu) > x/3\right)$$

e poiché $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} (V_k - \mu) \rightarrow 0$ q.c. per $n \rightarrow \infty$, allora tale convergenza è anche in legge e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(3 \sum_{k=1}^{n^2} \max(X_k, Y_k) > 2n^2 + xn^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} (V_k - \mu) > x/3\right) = 1 - F_0(x/3),$$

dove F_0 denota la f.d. della v.a. $Z = 0$ q.c. e il limite è valido nei punti di continuità di F_0 . Quindi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(3 \sum_{k=1}^{n^2} \max(X_k, Y_k) > 2n^2 + xn^2\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 a) La f.d. di X_n è:

$$F_n(x) = \sum_{k \geq 1: k/n \leq x} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1/n \\ \frac{[nx]}{n} & \text{se } 1/n \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Poiché $[nx]/n \rightarrow x$ per ogni $x > 0$, è immediato verificare che $F_n(x) \rightarrow F_X(x)$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo F_X la f.d. di una v.a. $X \sim \text{Un}(0, 1)$. Quindi, $X_n \rightarrow X \sim \text{Un}(0, 1)$ in legge.

b) Poiché $X_n \rightarrow X \sim \text{Un}(0, 1)$ in legge, allora per ogni funzione $\psi \in C_b(\mathbb{R})$ si ha $\mathbb{E}(\psi(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(\psi(X))$ per $n \rightarrow \infty$. Ora, una funzione continua $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è ovviamente limitata ed estendibile ad una funzione di $C_b(\mathbb{R})$. Continuando ad usare g per denotare tale estensione, si ha $\mathbb{E}(g(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(g(X))$, quando $n \rightarrow \infty$. Osservando che

$$\mathbb{E}(g(X_n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(g(X)) = \int_0^1 g(x) dx,$$

si ottiene la tesi.

Esercizio 4 a) Ricordiamo che se $X \in L^p$ allora $X e^{i\theta X} \in L^p$. Ciò significa che esiste la derivata k -esima di $\varphi(\theta)$ per ogni $k \leq p$ e si ha

$$\varphi^{(k)}(\theta) = \mathbb{E}((iX)^k e^{i\theta X}), \quad \text{e in particolare } \varphi^{(k)}(0) = \mathbb{E}((iX)^k).$$

Se $p = 2$, si ha

$$\varphi'(0) = \mathbb{E}(iX) \quad \text{e} \quad \varphi''(0) = \mathbb{E}((iX)^2).$$

Ma allora

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2.$$

b) Ovverviamo che se $\varphi(\theta) = e^{-\theta^3}$, allora $\varphi'(0) = 0 = \varphi''(0)$. Se quindi esistesse una v.a. X tale che $\varphi = \varphi_X$, si avrebbe $\text{Var}(X) = 0$, quindi $X = 0$ q.c. Ma allora sarebbe $\varphi_X(\theta) = 1$ per ogni θ , il che prova l'assurdo.