UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Estiva – II Appello – 26/07/2017 – h 09:30 – Aula L5

Esercizio 1. Si consideri la regione

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 1, \quad x^2+y^2-2 \le z \le 4-x-y\}$$

e si denoti con $\partial\Omega$ la superficie esterna che la racchiude. Calcolare l'area di $\partial\Omega$. (Punti 8)

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 2x(t)\dot{x}(t) - x(t)\big(1-x(t)\big) = 0\,. \tag{$\star$}$$

(a) Determinare gli equilibri di $(\star)$ e studiarne la stabilità. (Punti 5)

Suggerimento: Ponendo

$$y(t) = \dot{x}(t) - x(t)\big(1-x(t)\big)$$

riscrivere l'equazione $(\star)$ come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\big(1-x(t)\big) + y(t) \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

(b) Per ogni $\alpha \in]0,1[$ determinare la soluzione massimale di $(\star)$ tale che

$$\begin{cases} x(0) = 1-\alpha \\ \dot{x}(0) = \alpha(1-\alpha)\,. \end{cases}$$

(Punti 5)

(d) Generalizzare l'analisi della stabilità precedente all'equazione

$$\ddot{x}(t) - \phi'\big(x(t)\big)\dot{x}(t) + \dot{x}(t) - \phi\big(x(t)\big) = 0\,,$$

dove $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ ha n zeri semplici $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, cioé

$$\phi(x_i) = 0\,, \quad \phi'(x_i) \neq 0 \qquad (i=1,\dots,n).$$

(Punti 5)

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e tale che

$$f(x) = 1 - \left|\sin\frac{x}{2}\right| \qquad x \in [-\pi,\pi].$$

i) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier di f e studiarne la convergenza in $[-\pi, \pi]$.
(Suggerimento: Si ricordi che $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$) (Punti 7)

ii) Calcolare il valore della seguenti somme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$ (Punti 2)

Esercizio 4. Dimostrare che, per ogni $a > 1$, l'equazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + 1}\, dy = \frac{a}{a^2 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ammette un'unica soluzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assolutamente integrabile, data da

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1-a}{(1-a)^2 + x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$ (Punti 8)