UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in FISICA

$\mathbb{CALCOLO}$ 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione Estiva — Edificio Scienze – Aula G2C – 27/06/2016 – h 09:30

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) \\ \dot{y}(t) = -4x^3(t) + y(t) \end{cases} \tag{1}$$

1) Determinare il punto d'equilibrio del sistema e studiarne la stabilità per linearizzazione.

2) Trovare la soluzione del sistema che verifica le condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

3) Specificare la soluzione precedente nei casi particolari $y_0 = x_0^3$ e $x_0 = 0$ e disegnare le due curve soluzione.

4) Discutere il comportamento asintotico delle soluzioni (per $t \to \pm\infty$) nel caso generale.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$\mathrm{V}\,(x, y, z) = \big(ye^{x+y},\, -xe^{x+y},\, xy\big)\,,$$

determinarne il flusso attraverso la porzione di superficie

$$\varSigma = \big\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \ :\ |y| \le x \le 2 - |y|,\ z = x + y\big\}$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale risulti positiva.

Esercizio 3. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Calcolare
$$\int_A f_\alpha(x, y)\, dxdy \quad \text{dove} \quad A = \big\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y\big\}.$$

2) Calcolare
$$\int_B f_\alpha(x, y)\, dxdy \quad \text{dove} \quad B = \big\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\ |x| \leqslant y\big\}.$$

3) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali f_α è sommabile su
$$C := \big\{(x, y)\ :\ |x| \leqslant 1\,,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1\big\}.$$

Esercizio 4. Determinare la serie di Fourier del prolungamento 2π-periodico della funzione

$$f(x) = x^3 - \pi^2 x \qquad (-\pi < x < \pi)$$

e discuterne la convergenza. Calcolare quindi la somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\,.$$