

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Laurea in FISICA

CALCOLO 2

Prof. P. Cannarsa

Sessione invernale–I appello

Edificio Scienze–20/01/2016–h 15:00–Aula T7

Esercizio 1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y'(x) = xy(x) + y^2(x) \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (P_\alpha)$$

- 1) Giustificare il fatto che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, (P_α) ammette un'unica soluzione massimale y_α . Indichiamo con I_α l'intervallo massimale su quale è definita y_α .
- 2) Determinare y_0 e I_0 .
- 3) Determinare y_α e I_α per $\alpha \neq 0$.

Esercizio 2. Dato $a > 0$, calcolare l'area della porzione di superficie regolare di sostegno

$$\Sigma_a = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, y + z \leq a, x^2 - y^2 = z^2 \}.$$

Esercizio 3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n \geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{\log[1 + \exp(x^n)]}{1 + x^{n+2}} \quad (x \geq 0)$$

- 1) Separando i casi $0 \leq x < 1$, $x = 1$ e $x > 1$, calcolare il limite puntuale $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- 2) Dimostrare che $\forall n \geq 1$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{x^2} \quad \forall x \geq 1. \quad (M)$$

- 3) Utilizzando (M) , calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx.$$

Esercizio 4. Sfruttando il teorema di Plancherel calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^4 d\omega.$$