UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "TOR VERGATA"

Facoltà di SCIENZE MM. FF. NN.

PROGRAMMA di CALCOLO2 per il cdl in Fisica
Prof. Piermarco CANNARSA - Anno Accademico 2015/2016

1. **Equazioni differenziali**
   a. Esempi di equazioni differenziali: l'oscillatore armonico smorzato e l'equazione del pendolo. Il problema di Cauchy per sistemi differenziali del prim'ordine in forma normale. Equivalenza con l'equazione di Volterra. Esistenza di soluzioni del problema di Cauchy (D). Unicità (D). L'equazione logistica. Equazioni esatte. Tecnica del fattore integrante.
   b. Prolungamento di soluzioni. Soluzioni massimali. Escursione dai compatti (D). Equazioni di Mafredi. Dipendenza senza continua dai dati. Il caso della striscia: dinamica sublineare e esistenza globale. Equazioni di Bernoulli.
   c. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Sistemi differenziali lineari. Sistemi fondamentali di soluzioni e matrici fondamentali. Esistenza di sistemi fondamentali di soluzioni (D). Formula di Liouville. Metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Esponenziale di una matrice. Sistema fondamentale di soluzioni per autovalori semplici. Equazioni differenziali lineari di ordine n: struttura dello spazio delle soluzioni. Metodo della variazione delle costanti. Equazioni a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea e ricerca di una soluzione del problema non omogeneo per termini noti particolari. Equazioni di Eulero.
   d. Flusso di un sistema autonomo. Legge di gruppo. Insiemi invarianti per il flusso. Orbite periodiche. Integrali primi. Modello preda-predatore. Criterio di periodicità per sistemi piani. Applicazione al modello di Lotka-Volterra. Insiemi alfa-limite e omega-limite. Stabilità di un punto di equilibrio secondo Liapunov. Criterio di linearizzazione. Modello SIR. Funzioni di Liapunov. Criterio di stabilità di Liapunov (D). Funzioni di Liapunov strette e stabilità asintotica (D). Bacino di attrazione. Ulteriori criteri per lo studio della stabilità asintotica dei punti di equilibrio. Esempi di funzioni di Liapunov. L'equazione di van der Pol.

3. **Integrazione**
   a. Funzioni semplici e loro proprietà. Integrale di una funzione semplice. Funzioni integrabili secondo Riemann su $\mathbf{R}^N$. Integrabiltà delle funzioni continue a supporto compatto (D). Misura di Peano-Jordan. Integrale su insiemi misurabili.

Misurabilità degli insiemi normali. Integrabilità delle funzioni continue q.o., limitate e a supporto compatto. Formule di riduzione per integrali doppi. Formule di riduzione per gli integrali tripli. Volume dei solidi di rotazione. Cambiamento di variabili negli integrali multipli. Coordinate polari nel piano. Coordinate sferiche. Integrale di funzioni definite su insiemi non limitati. Integrale di funzioni non limitate nell'intorno di un punto.

b. Porzioni di superfici regolari (PSR). Area di una PSR e integrali superficiali. Formula di Gauss-Green (D: per insiemi normali). Calcolo dell'area di figure piane. Teorema della divergenza nel piano. Il teorema della divergenza nello spazio. Teorema di Stokes (D). Potenziale vettore.

c. Funzioni semicontinue e loro proprietà. Teorema di Dini sulla convergenza uniforme. Integrale delle funzioni semicontinue. Funzioni sommabili secondo Lebesgue. Successioni monotone di funzioni integrabili. Estensione dello spazio delle funzioni integrabili, includendo funzioni non limitate e a sopporto non compatto. Il teorema di Beppo Levi ed il lemma di Fatou. Teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Derivazione sotto il segno di integrale. Insiemi misurabili secondo Lebesgue e misura di Lebesgue. Proprietà della misura di Lebesgue. Insieme di Cantor. Insiemi di misura nulla e proprietà soddisfatte quasi ovunque.

4. **Serie e trasformate di Fourier**

a. Funzioni periodiche e loro proprietà. Coefficienti di Fourier di una funzione periodica di quadrato sommabile. Convergenza puntuale di serie di Fourier (D). Convergenza totale di serie di Fourier (D). Convergenza uniforme di serie di Fourier. Serie di Fourier complesse. Applicazione alla soluzione del l'equazione del calore e delle corde vibranti. Fenomeno di Gibbs.

b. Trasformata di Fourier di una funzione sommabile. Proprietà algebriche della trasformata (D). Proprietà differenziali della trasformata di Fourier (D). Lemma di Riemann-Lebesgue (D). Trasformata di Fourier di una convoluzione. Inversione della trasformata. Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni ordinarie, e alle equazioni del calore e delle onde. Trasformata di Fourier di funzioni a decrescenza rapida. Formula di Plancherel. Teorema di Shannon (D).

D = si richiede dimostrazione