Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata'

Corso di Laurea Magistrale in Matematica Pura e Applicata
Sessione Autunnale aa 2010/11 22 settembre 2011

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Prof. P. Cannarsa

Esercizio 1. Sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H e sia $\lambda \in \ell^\infty$ (ossia $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\sup_n |\lambda_n| < \infty$).

1) Provare che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \in H \qquad \forall\, x \in H\,.$$

2) Posto
$$\Lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \in H \qquad \forall\, x \in H\,,$$
provare che $\Lambda \in \mathcal{L}(H)$ e calcolare $\|\Lambda\|$.

3) Provare che, se $\lambda \in c_0$ (ossia $\lambda_n \to 0$ per $n \to \infty$), allora Λ è un operatore compatto.

Esercizio 2. Sia $T > 0$. Consideriamo l'operatore lineare $V : L^1(0,T) \to L^1(0,T)$ defininito, per ogni $f \in L^1(0,T)$, da
$$Vf(t) = \int_0^t f(s)ds \qquad t \in (0,T)\,.$$

- Dimostrare che V è continuo e calcolare $\|V\|$.
- Dimostrare che V trasforma convergenza debole in forte, cioé $\forall\, f_n, f \in L^1(0,T)$
$$f_n \rightharpoonup f \quad \Longrightarrow \quad Vf_n \to Vf\,.$$

  Suggerimento: si inizi col provare che
$$f_n \rightharpoonup f \quad \Longrightarrow \quad Vf_n(t) \to Vf(t) \quad \forall t \in [0,T]\,.$$