

# UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

## Laurea in MATEMATICA

### ANALISI MATEMATICA 4

*Prof. P. Cannarsa*

01/07/2020, ore 10:00

modalità telematica

**Esercizio 1** Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} x' = \frac{1-x^2}{x} \\ y' = y^2 - x^2 \end{cases} \quad (S)$$

a) Si giustifichi l'esistenza di un'unica soluzione massimale di (S) per ogni dato iniziale

$$x(0) = x_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

b) Si determinino gli equilibri di (S) nel dominio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  e se ne studi la stabilità.

c) Posto  $x_0 = \sqrt{2}$ ,  $y_0 = 0$ ,

1) si risolva esplicitamente l'equazione per la prima componente  $x$ ;

2) si dimostri che la corrispondente soluzione massimale di (S) è definita su  $[0, +\infty)$ .

*Suggerimento:* si confronti la seconda componente  $y$  con le soluzioni  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) dei problemi

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) - i^2 \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (S_i)$$

**Esercizio 2.** Si consideri la porzione di superficie sferica

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\},$$

orientata in modo che il vettore normale sia uscente dalla palla.

- a) Calcolare l'area di  $\Sigma$ , considerata come superficie di rotazione.
- b) Applicando il teorema di Stokes, calcolare il flusso del rotore del campo di vettori

$$V(x, y, z) = (-x^2y, x^3 + z^2, \arctan(e^{x+y+z}))$$

attraverso  $\Sigma$ .

**Esercizio 3.** Determinare i punti della curva  $\Gamma$  data dall'intersezione della sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

con il piano di equazione

$$z = x + y + \sqrt{6}$$

che si trovano a distanza minima e massima dall'asse  $z$ .

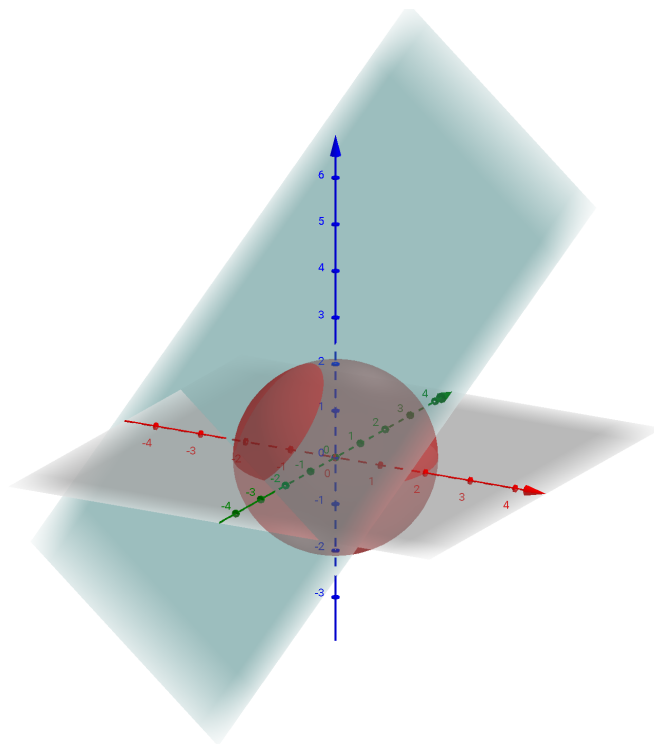


Figure 1: default