UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Laurea in MATEMATICA

ANALISI MATEMATICA 4

Prof. P. Cannarsa

II appello (sessione autunnale) 25/09/2019, ore 10:00, aula L3 (Scienze)

Esercizio 1. Sia $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ un numero maggiore o uguale a $1/2$.

1) Sviluppare in serie di soli coseni la funzione

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \cos(\lambda x) & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2\lambda} \\ 0 & \frac{\pi}{2\lambda} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

e discutere la convergenza della serie così ottenuta. [Punti 8]

Suggerimento: si ricordi che $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

2) Utilizzando lo sviluppo precedente per $\lambda = \pi/2$, calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\pi^2 - 4n^2}.$$ [Punti 2]

Esercizio 2. Si consideri il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(4 - y(t)\big) \\ y'(t) = y(t)\big(x^2(t) - 1\big) \end{cases} \qquad (S)$$

1) Si calcoli la soluzione di (S) con condizione iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. [Punti 2]

2) Si determinino gli equilibri E del sistema e se ne studi la stabilità con il metodo di linearizzazione. [Punti 3]

3) Provare che l'aperto $Q_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ è invariante per (S), cioé che ogni soluzione di (S), tale che $(x(0), y(0)) \in Q_+$, resta in Q_+ su tutto il suo intervallo di definizione. Determinare, quindi, un integrale primo per (S) sull'aperto Q_+. [Punti 7]

Esercizio 3. Si consideri la porzione di superficie regolare

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z = 12\,,\ 0 \geqslant 4z \geqslant 4y - 17\Big\},$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale risulti positiva.

1) Calcolare il flusso normale del rotore del campo vettoriale $V(x, y, z) = (x - y, z, y^2)$ attraverso Σ. [Punti 8]

2) Determinare i punti di minima altezza z su Σ. [Punti 2]