

# UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

## Laurea in MATEMATICA

### ANALISI MATEMATICA 4

*Prof. P. Cannarsa*

II esonero

4 giugno 2015

**Esercizio 1.** Si consideri l'equazione differenziale

$$x'''(t) - 3x'(t) - 2x(t) = e^{-t} \quad (1)$$

- 1) Determinare l'integrale generale di (1). [8]
- 2) Detta  $x_\alpha$  la soluzione di (1) che verifica le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \\ x''(0) = \alpha, \end{cases}$$

determinare tutti gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  tali che  $x_\alpha(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . [7]

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema (preda-predatore)

$$\begin{cases} x'(t) = (1 - y(t))x(t) \\ y'(t) = (x(t) - 1)y(t) \end{cases} \quad (2)$$

nell'aperto  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ .

- 1) Determinare un integrale primo di (2) e usarlo per costruire una funzione di Liapunov per l'unico equilibrio di (2) in  $Q$ . [7]
- 2) Detta  $\Gamma$  l'orbita di (2) contenente il punto (1, 2):
  - (a) determinare il punto di  $\Gamma$  di ascissa massima; [7]
  - (b) provare che  $\max_\Gamma(x + y)$  è assunto in una delle intersezioni di  $\Gamma$  con la retta  $x = y$ . [3]