Equazioni differenziali

Un'*equazione differenziale* è una relazione del tipo

$$f(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0,$$

che tiene conto del valori di una funzione (incognita) u e delle sue derivate fino ad un certo *ordine* n.

ESEMPI: 1) (Legge di Newton $F = ma$) se u rappresenta la posizione di una particella di massa m, u'' rappresenta la sua accelerazione per cui una particella soggetta ad una forza F soddisfa

$$mu''(t) = F(t)$$

(la variabile l'abbiamo chiamata t perchè rappresenta il tempo). In questo caso $n = 2$ e

$$f(t, u, u', u'') = f(t, u'') = mu'' - F(t).$$

2) (Oscillazioni di una molla) La funzione u rappresenta la distanza dalla posizione di riposo di un corpo di massa m posto all'estremità di una molla. Allora si ha (per oscillazioni abbastanza piccole)

$$mu'' = -ku$$

(k una costante che dipende dalla molla). In questo caso

$$f(t, u, u', u'') = f(t, u, u'') = mu'' + ku.$$

3) (Circuito RC) Se u rappresenta la differenza di potenziale ai capi di un condensatore di capacità C collegato ad una resistenza R, si ha

$$CRu' + u = 0.$$

In questo caso $n = 1$.

Altri facili esempi si trovano in fisica, economia, biologia, chimica, ecc.

Soluzione di un'equazione differenziale

Def. Diremo che u è *soluzione* dell'equazione differenziale

$$f(t, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0,$$

se il dominio di u è un intervallo I, u è derivabile n volte su I e per ogni $t \in I$ si ha

$$f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0.$$

Siano $u_0, \ldots, u_{n-1} \in \mathbf{R}$, $t_0 \in \mathbf{R}$. Diremo che u è soluzione del *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} f(t, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0, \\ u(t_0) = u_0 \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

se $u : I \to \mathbf{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale, $t_0 \in I$, e sono verificate le uguaglianze $u(t_0) = u_0, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$ (*dati iniziali* o *condizioni iniziali*).

NOTA. In generale, data una f qualsiasi, può non esistere alcuna soluzione dell'equazione differenziale, oppure un problema di Cauchy può avere infinite soluzioni. Il problema dell'esistenza ed unicità delle soluzioni di equazioni differenziali generali verrà affrontato in seguito. Noi ci occuperemo di alcuni casi in cui è possibile costruire direttamente le soluzioni.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Alcune equazioni differenziali che sappiamo già risolvere:

$$u' = 0$$

(soluzione $u = c$ costante per il *Teorema della derivata nulla*: "se $u' = 0$ su un intervallo allora u è costante");

$$u' = f(t)$$

con f continua (soluzione $u(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$ per il Primo Teorema del Calcolo).
Se $u = e^{ct}$, allora u è soluzione di

$$u' = cu.$$

Questa proprietà delle funzioni esponenziali può venire generalizzata: sia a una funzione continua, e A una sua primitiva. Consideriamo $u(t) = c\exp(-A(t))$; allora

$$u'(t) = -c\exp(-A(t))A'(t) = -c\exp(-A(t))a(t),$$

quindi u è soluzione dell'equazione

$$u' + a(t)u = 0.$$

Viceversa, moltiplicando l'equazione per $\exp(A(t))$ (il che si può fare perchè $\exp(A(t)) \neq 0$) otteniamo l'equazione equivalente

$$\exp(A(t))u' + \exp(A(t))a(t)u = 0,$$

ovvero

$$D(\exp(A(t))u) = 0.$$

Per il Teorema della derivata nulla si deve avere allora

$$\exp(A(t))u(t) = c,$$

una costante, ovvero

$$u(t) = c\exp(A(t)).$$

Def. Siano a e b funzioni continue su I. Un'equazione differenziale della forma

$$u' + a(t)u = b(t)$$

viene detta *equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti continui.*

Troviamo ora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + a(t)u = b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Sia ora A la primitiva di a data da

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

(ovvero tale che $A(t_0) = 0$). Moltiplicando l'equazione per $\exp(A(t))$ abbiamo

$$\begin{aligned} D(u \exp(A(t))) = &\ \exp(A(t))u' + \exp(A(t))a(t)u \\ = &\ \exp(A(t))b(t). \end{aligned}$$

Integrando tra t_0 e t otteniamo

$$\begin{aligned} \Big[u(s) \exp(A(s))\Big]_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} D(u(s) \exp(A(s)))\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t} \exp(A(s))b(s)\, ds. \end{aligned}$$

Ricordando il dato iniziale $u(t_0) = u_0$ si ha

$$\begin{aligned} \Big[u(s) \exp(A(s))\Big]_{t_0}^{t} &= u(t) \exp(A(t)) - u(t_0) \exp(A(t_0)) \\ &= u(t) \exp(A(t)) - u_0, \end{aligned}$$

per cui si ha

$$u(t) \exp(A(t)) = u_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(A(s))b(s)\, ds,$$

ovvero la *formula risolutiva*

$$u(t) = u_0 \exp(-A(t)) + \exp(-A(t)) \int_{t_0}^{t} \exp(A(s))b(s)\, ds,$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Al variare di u_0 si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione differenziale nell'intervallo I.

OSSERVAZIONE: come nel primo Teorema del Calcolo la soluzione di un'equazione differenziale è ricondotta a un problema di integrazione (in questo caso due integrali).

Esercizi

1) Si calcoli il valore di $y(\frac{1}{10})$, dove y è la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' + 10y = e^{-10x}$$

tale che $y(0) = 0$.

Moltiplichiamo l'equazione per $\exp(10x)$. Si ottiene allora

$$e^{10x}y' + 10e^{10x}y = \left(e^{10x}y\right)' = 1.$$

Integrando tra 0 e $\frac{1}{10}$ si ottiene

$$ey(\frac{1}{10}) = \left[e^{10x}y(x)\right]_0^{1/10} = \int_0^{1/10} \left(e^{10x}y\right)' dx$$

$$= \int_0^{1/10} 1\, dx = \frac{1}{10}.$$

Quindi il valore cercato è $y(\dfrac{1}{10}) = \dfrac{1}{10e}$.

2) Si calcoli la soluzione u dell'equazione differenziale

$$u' + u = e^{2x}$$

tale che $u(1) = 0$

Moltiplichiamo l'equazione per e^x. Si ottiene allora

$$e^x u' + e^x u = D(e^x u) = e^{3x}.$$

Integrando tra 1 e x otteniamo:

$$e^x u(x) = \int_1^x D(e^t u)\, dt = \int_1^x e^{3t}\, dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_1^x = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{e^3}{3},$$

e dunque la soluzione è

$$u(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{3-x}.$$

3) Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + \frac{1}{x}u = 2\arctan x \\ u(1) = 3. \end{cases}$$

Si determini $u(\sqrt{3})$.

Moltiplichiamo per $x = \exp(\log x) = \exp(\int_1^x \frac{1}{t}dt)$ l'equazione differenziale. Si ottiene

$$(xu)' = xu' + u = 2x\arctan x.$$

Quindi, integrando tra 1 e $\sqrt{3}$ si ha

$$\sqrt{3}u(\sqrt{3}) - u(1) = \int_1^{\sqrt{3}} D(xu(x))dx = 2\int_1^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx.$$

L'integrale si ottiene facilmente per parti:

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\,dx =& \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ =& \frac{x^2}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx \\ =& \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{x}{2} + c.\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} u(\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{3}\bigg(u(1) + 2\Big(\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\Big)\bigg) \\ &= \sqrt{3}\Big(\frac{5\pi+18}{18}\Big) - 1.\end{aligned}$$

4) Sia u la soluzione dell'equazione differenziale

$$(1+x)u' - u = \frac{10x(1+x)}{1+x^2}$$

tale che $u(0) = 0$. Determinare $u(1)$.

Dato che la funzione $1+x$ è positiva tra 0 e 1 possiamo dividere l'equazione per $1+x$, ottenendo

$$u' - \frac{1}{(1+x)}u = \frac{10x}{1+x^2},$$

ovvero un'equazione differenziale del prim'ordine nella forma usuale $u' + a(x)u = b(x)$. Si può applicare la formula risolutiva, oppure ripetere il procedimento che porta a tale formula. Scegliamo questa seconda strada, moltiplicando l'equazione per

$$A(x) = \frac{1}{(1+x)}.$$

Si ottiene

$$\frac{1}{(1+x)}u' - \frac{1}{(1+x)^2}u = \frac{10x}{(1+x)(1+x^2)},$$

ovvero

$$D\Big(\frac{1}{(1+x)}u\Big) = \frac{10x}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Possiamo integrare fra 0 e 1, ottenendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u(1) &= \frac{1}{2}u(1) - u(0) = \int_0^1 D\Big(\frac{1}{(1+x)}u\Big)dx \\ &= 10\int_0^1 \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx.\end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale si calcola facilmente, per esempio usando il metodo dei fratti semplici, scrivendo

$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x},$$

per cui

$$\begin{aligned}u(1) &= 10\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\Big)dx \\ &= 10\Big[\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \arctan x - \log(1+x)\Big]_0^1 \\ &= 10\Big(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - \log 2\Big) = \frac{5}{4}(\pi - \log 4).\end{aligned}$$

5) Sia u la soluzione dell' equazione differenziale

$$u' = \frac{\sin(2x)}{1+\cos x}$$

tale che $u(0)=0$. Determinare $u(\frac{\pi}{2})$.

La soluzione u è data per il teorema fondamentale del calcolo da

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sin(2t)}{1+\cos t} dt,$$

per cui dobbiamo calcolare

$$u(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+\cos t} dt.$$

Usando la formula di duplicazione $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, e la sostituzione $y = \cos t$, si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t}{1+\cos t} dt = 2\int_0^1 \frac{y}{1+y} dy$$

$$= 2\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+y}\Big) dy = 2\Big[t - \log(1+y)\Big]_0^1 = 2(1-\log 2).$$

6) Si calcoli la derivata seconda in $x=0$ della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + (\sin(10x))u = \sin(10x) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Dall'equazione differenziale otteniamo subito

$$u'(0) = \sin(0) - 0 \cdot \sin(0) = 0.$$

Derivando entrambi i membri dell'equazione differenziale inoltre si ha

$$u'' + 10\cos(10x)u + \sin(10x)u' = 10\cos(10x).$$

per cui

$$u''(0) = 10\cos(0) - 10\cos(0)u(0) - \sin(0)u'(0) = 10.$$