

Metodi Matematici per l'Ingegneria

5. Esercizi sul metodo di Gram-Schmidt

Risolvere i seguenti esercizi usando il metodo di Gram-Schmidt semplificando, dove possibile, il calcolo usando l'ortogonalità di insiemi noti di funzioni trigonometriche o esponenziali.

1. Calcolare una base ortogonale in $L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ del sottospazio generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$ e $x_2(t) = e^{it}$.
2. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1$.
3. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = e^{it}$, $x_2(t) = e^{-it}$ e $x_3(t) = \cos t$.
4. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = 2 - \cos^2 t$ e $x_3(t) = \sin t$.
5. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos^2 t$, $x_2(t) = 1$ e $x_3(t) = \sin^2 t$.
6. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \sin t \cos t$ e $x_3(t) = \sin^2 t \cos t$.
7. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = \sin t$.
8. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t$, $x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = t$.
9. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = t$.
10. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni

$$x_1(t) = \cos 2t, x_2(t) = \cos t \text{ e } x_3(t) = t.$$

11. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t, x_2(t) = \sin t$ e $x_3(t) = t^2$.
12. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = t$.
13. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t, x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = i$.
14. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t, x_2(t) = 1$ e $x_3(t) = t^3$.
15. Sia V il sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1, x_2(t) = t$ e $x_3(t) = t^4$. Trovare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V : \langle x, t^2 \rangle = 0\}$.
(Suggerimento: prendere una generica combinazione lineare di $ax_1 + bx_2 + cx_3$. Esprimere la condizione di appartenenza a V_0 come una condizione su a, b e c , da cui dedurre che gli elementi di V_0 sono combinazioni lineari di alcuni elementi particolari di V , ovvero V_0 è generato da questi vettori. A questo punto trovare una base ortogonale).
16. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t, x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1 + 2 \cos t$. Sia $y(t) = t^2$; trovare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0\}$.
17. Sia V_1 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin^2 t, x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = \cos t$ e sia V_2 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $y_1(t) = t, y_2(t) = |t|$. Determinare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V_1 : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in V_2\}$.
18. Sia V_1 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1, x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = \cos^2 t$ e sia V_2 il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $y_1(t) = 1, y_2(t) = \sin t, y_3(t) = \sin^2 t$, e $y_4(t) = \sin^3 t$. Determinare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V_2 : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in V_1\}$.
19. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1, x_2(t) = t$ e $x_3(t) = t^3$.
20. Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t, x_2(t) = \cos 3t \sin 2t, x_3(t) = \cos 5t \sin 4t$.