Metodi Matematici per l'Ingegneria
4. Esercizi su distribuzioni

Derivate nel senso delle distribuzioni

Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni delle seguenti funzioni (può essere utile disegnare un grafico approssimato di f e f' ove possibile).

1. $f(x) = \chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)\,\sin x$.

2. $f(x) = \chi_{(-\frac{\pi}{2},\pi)}(x)\,\sin x$.

3. $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)\,(x-1)(x+4)$.

4. $f(x) = \min\{-1+|x|, 0\}\,\chi_{(0,+\infty)}(x)$.

5. $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)\,(x^2-1)^2$. Di questa calcolare anche f'''.

6. $f(x) = \chi_{(0,\pi)}(x)\,\cos x$.

7. $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)\,(x-1)(x^2-1)$.

8. $f(x) = \min\{-1+\log(1+x^2), 0\}\,\chi_{(0,+\infty)}(x)$.

9. $f(x) = \max\{1-x^2, 0\}\,\chi_{(0,1)}(x)$.

10. $f(x) = \min\{-1+x^4, 0\}\,\chi_{(0,+\infty)}(x)$.

11. $f(x) = (x^2-1)^2\,\chi_{(-1,1)}(x)$.

12. $f(x) = (x^3-3x)\,\chi_{(-1,1)}(x)$.

Convergenza nel senso delle distribuzioni

Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$ (H= funzione di Heaviside).

13. $f_h(x) = H(x+h)\,\cos^2(hx)$.

14. $f_h(x) = H(x+h)|\sin(hx)| + \delta_h$.

15. $f_h(x) = h(\delta_{1/h} - \delta_{-1/h}) + \delta_h$.

16. $f_h(x) = h^2(\delta_{1/h^2} - \delta_{-1/h^2}) + h\delta_h$.

17. $f_h(x) = (H(x-h) - H(2h-x))|\cos(hx)|$.

18. $f_h(x) = h^2\delta_h + |\cos(h^2x)|$.

19. $f_h(x) = \Big|\sin^2(hx)\cos(hx)\Big|$.

20. $f_h(x) = \Big|\sin(hx)\cos(hx)\Big|$.

21. $f_h(x) = \Big|\sin(hx)\cos\Big(\dfrac{x}{h}\Big)\Big|$.

22. $f_h(x) = \sin(hx)\cos\Big(\dfrac{x}{h}\Big)$.

23. $f_h(x) = \cos(hx)\sin\Big(\dfrac{x}{h}\Big)$.

24. $f_h(x) = h\max\{1-h|x|, 0\}$.

25. $f_h(x) = h^2\chi_{(0,1/h)}(x) - h^2\chi_{(-1/h,0)}(x) + \sin hx$

26. $f_h(x) = \sin(hx)e^{-x^2/h}$. Calcolare il limite anche di f_h^2

27. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, in $L^1(\mathbb{R})$ o nel senso delle distribuzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n}\,e^{-nx^2}, \qquad g_n(x) = e^{-nx^2}, \qquad h_n(x) = e^{-(x-n)^2}.$$

28. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \min\{h|x|, 1\}$.
(a) Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;
(b) Calcolare i limiti di f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.

29. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty,h)}(x)\cos(2\pi hx)$.
(a) Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;
(b) Calcolare il limite di f_h' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.

30. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia

$$f_h(x) = \begin{cases} \max\{hx+1, 0\} & \text{se } x \le 0 \\ -1 & \text{se } x \ge 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;
(b) Calcolare il limite di f_h' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.

31. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty,h)}(x)\sin(2\pi hx)$.
(a) Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;
(b) Calcolare il limite di f_h' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.

Equazioni differenziali nel senso delle distribuzioni

32. Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' + 4y = -2\delta_{2\pi} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{cases}$ usando la trasformata di Laplace e disegnarne il grafico ($\delta_{2\pi}$ = delta di Dirac in 2π).

33. Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' - 3y' = \delta(t-1) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$
($\delta(t-1)$ denota la delta di Dirac in $t = 1$) e tracciarne un grafico approssimato

34. Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ e disegnarla.
($\delta(t-t_0)$ denota la delta di Dirac in $t = t_0$).

35. Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' + y' = \delta(t-1) + 2H(t-2) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$
($\delta(t-1)$ denota la delta di Dirac in $t = 1$ e H la funzione di Heaviside o funzione a gradino).

36. Risolvere $\begin{cases} y'' - 9y = 3\delta(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ usando la trasformata di Laplace e tracciare un grafico della soluzione ($\delta(t-1)$ denota la delta di Dirac in $t = 1$).

37. Risolvere $\begin{cases} y'' - 4y = 3\delta(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ usando la trasformata di Laplace e tracciare un grafico della soluzione ($\delta(t-1)$ denota la delta di Dirac in $t = 1$).

38. Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{-t} + \delta(t-1) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$
($\delta(t-1)$ denota la delta di Dirac in $t = 1$)

Verificare le soluzioni delle equazioni qui sopra calcolandone le derivate nel senso delle distribuzioni.