

# Metodi Matematici per l'Ingegneria

## 3. Esercizi su trasformata di Laplace

### Calcolo di trasformate di convoluzioni

1. Calcolare la trasformata di Laplace di  $f(t) = \int_0^t (t-s)^{10} \cos^2 s \, ds$
2. Calcolare la trasformata di Laplace di  $f(t) = \int_0^t \cos^2(t-s)g(s) \, ds$ , dove  $g(s) = \max\{1 - |s-1|, 0\}$
3. Calcolare la trasformata di Laplace di  $f(t) = \int_0^t (t-s)^{10}(\sin^2 s + s) \, ds$

### Equazioni integro-differenziali

4. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + 5 \int_0^x u(x-t) \cos(2t) \, dt = 10 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

5. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u' + u = -3 \int_0^x u(t) e^{3(x-t)} \, dt \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

6. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + \int_0^x u(x-t) \, dt = x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

7. Risolvere l'equazione integro-differenziale  $\int_0^t \sin(t-x) y'(x) dx = t \cos t$  con condizione iniziale  $y(0) = 1$ .

8. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione  $y$  di

$$\begin{cases} y' = 3 \int_0^x e^{2t} y(x-t) dt \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

9. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione  $y$  di

$$\begin{cases} y' = 2 \int_0^x e^{3t} y(x-t) dt \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

10. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione  $y$  di

$$\begin{cases} y' = \int_0^x e^t y(x-t) dt \\ y(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

11. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione  $y$  di

$$\begin{cases} y'' - y = \int_0^x (t-x)e^{2t} dt \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

12. Trovare la soluzione  $y$  dell'equazione integrale  $\int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^4 - 3x^3$  usando la trasformata di Laplace.

13. Trovare la soluzione  $y$  dell'equazione integrale  $\int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^3 - x^4$  usando la trasformata di Laplace

14. Trovare la soluzione  $y$  dell'equazione integrale  $4 \int_0^x y(x-t) dt = y' - 2t^3$  con  $y(0) = 0$ .

15. Trovare (se esiste) la soluzione  $y$  dell'equazione integro-differenziale  $\int_0^x \sin(x-t) y'(t) dt = \cos x$  con  $y(1) = 1$ .

16. Trovare la soluzione  $y$  dell'equazione integro-differenziale  $\int_0^x (t-x)^2 y'(t) dt = x^3$  con  $y(1) = 1$ .

**Trasformate di potenze non intere.**

17. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} \int_0^x y'(t) (x-t)^{3/2} dt = x^4 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

18. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\int_0^x y(t) (x-t)^{3/2} dt = x^3 - 2x^2.$$

19. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\int_0^x y(t) \sqrt{x-t} dt = -x^2.$$

20. Risolvere l'equazione integro-differenziale  $3 \int_0^x y'(x-t) \sqrt{t} dt = 2 \int_0^x y(x-t) \sqrt{t^3} dt$  con dato iniziale  $y(0) = 4$ .