

Metodi Matematici per l'Ingegneria

7. Esercizi su serie di Fourier

1. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ in $(-\pi, \pi]$.

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza puntuale.

Verificare tale convergenza per $x = \pi/2$ e $x = 0$ calcolandone la somma.

2. Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π -periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la somma della serie così ottenuta per $x = 0$.

3. Sia $f(x) = \text{sgn}(x) \cdot \cos x$ definita per $x \in (-\pi, \pi)$ (sgn è la funzione segno)
- (a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;
- (b) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.
(aiutarsi disegnando il grafico di f).

4. Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ -\cos x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

(a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;

(b) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.

5. Sia $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

(a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;

(b) Scrivere la relativa identità di Parseval;

(c) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.

6. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2]}(x) \cos^2 x$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi/2$.

- 7.** Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2]}(x) \cos x$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi/2$.
- 8.** Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \chi_{(0, \pi]} \cos(x/2)$ in $(-\pi, \pi]$. Discuterne la convergenza puntuale della serie di Fourier, verificandola per $x = 0$.
- 9.** Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \sin(x/2)$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi/2$.
- 10.** Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2]}(x) \sin x$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi/2$.
- 11.** Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \max\{x + 1, 1\}$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f , discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi$.
- 12.** Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = \chi_{(-\pi, 0]}(x) + x\chi_{(0, \pi]}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Determinarne la parte pari e la parte dispari e scriverne le serie di Fourier in forma trigonometrica (si possono usare le serie di Fourier note). Dedurne la serie di Fourier per f e discuterne la convergenza puntuale.
- 13.** Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = 2\chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) - x\chi_{(0, \pi/2)}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Determinarne la parte pari e la parte dispari e scriverne le serie di Fourier in forma trigonometrica. Dedurne la serie di Fourier per f e discuterne la convergenza puntuale.
- 14.** Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = (x + \frac{\pi}{2})\chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) - \pi\chi_{(0, \pi/2)}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale.
- 15.** Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = \frac{\pi}{2}(x + 1)\chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) - \pi\chi_{(0, \pi/2)}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale.
- 16.** Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = 2H(x) - H(x + \frac{\pi}{2}) - H(x - \frac{\pi}{2})$ in $(-\pi, \pi]$ ($H =$ funzione di Heaviside). Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e la relativa identità di Parseval; discuterne la convergenza puntuale.

17. Sia $f(x) = 2\chi_{(0,\pi/2)} - \chi_{(-\pi/2,0)} \in L^2(-\pi, \pi)$. Disegnare in $(-4\pi, 4\pi)$ la funzione 2π -periodica che coincide con f su $(-\pi, \pi)$.

Calcolare la parte pari e la parte dispari di f ;

calcolare separatamente le serie di Fourier della parte pari e della parte dispari di f ;
dedurre la serie di Fourier di f ;

scrivere l'identità di Parseval per f ;

discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier di f ; verificarne la convergenza in $x = 0$.

18. Sia f la funzione 2π -periodica che su $(-\pi, \pi)$ vale $f(x) = (\min\{x, 0\})^2$

(a) disegnare la funzione f ;

(b) calcolare la parte pari f_p e la parte dispari f_d di f ;

(c) discutere la convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier di f_p e f_d , rispettivamente;

(d) scrivere la serie di Fourier di f_p e la relativa identità di Parseval;

(e) scrivere la somma della serie numerica ottenuta calcolando la serie di Fourier di f in $x = \pi$ usando la convergenza puntuale (notare che non occorre calcolare la serie di Fourier di f_d).

19. Scrivere la serie di Fourier della parte pari della funzione f definita su $(-\pi, \pi)$ da $f(x) = \min\{\pi x, x^2\}$.

20. Scrivere la serie di Fourier della funzione f definita su $(-\pi, \pi)$ da $f(x) = x^3$ e discuterne la convergenza puntuale.

21. Scrivere la serie di Fourier della funzione f definita su $(-\pi, \pi)$ da $f(x) = |x|^3$ e discuterne la convergenza puntuale.

22. Discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier della funzione f definita su $(-\pi, \pi)$ da $f(x) = \pi^2 - x^2$.

(Nota: non si richiede il calcolo della serie di Fourier).

23. Discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier della funzione f definita su $(-\pi, \pi)$ da $f(x) = \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$.