

# Metodi Matematici per l'Ingegneria

## 6. Esercizi sul teorema delle proiezioni

In alcuni dei seguenti esercizi il calcolo delle basi di alcuni sottospazi è già stato proposto negli esercizi del foglio sul metodo di Gram-Schmidt.

1. Calcolare la proiezione in  $L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  di  $x(t) = t$  sul sottospazio generato da  $x_1(t) = \sin t$  e  $x_2(t) = e^{it}$ .
2. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = \cos t$  e  $x_3(t) = 1$ . Calcolare la distanza della funzione  $y(t) = \sin t$  da  $V$ .
3. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = e^{it}$ ,  $x_2(t) = e^{-it}$  e  $x_3(t) = \cos t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = e^t$  su  $V$ .
4. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \cos 2t$ ,  $x_2(t) = 2 - \cos^2 t$  e  $x_3(t) = \sin t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = t$  su  $V$ .
5. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \cos^2 t$ ,  $x_2(t) = 1$  e  $x_3(t) = \sin^2 t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = t$  su  $V$ .
6. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \sin t$ ,  $x_2(t) = \sin t \cos t$  e  $x_3(t) = \sin^2 t \cos t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = t - i$  su  $V$ .
7. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = t^2$  e  $x_3(t) = \sin t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = 1 - i$  su  $V$ .
8. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \sin 2t$ ,  $x_2(t) = \cos^2 t$  e  $x_3(t) = t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = i - \sin t$  su  $V$ .
9. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \sin 2t$ ,  $x_2(t) = t^2$  e  $x_3(t) = t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = i \cos t - t^4$  su  $V$ .
10. Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \cos 2t$ ,  $x_2(t) = \cos t$  e  $x_3(t) = t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = it - t^3$  su  $V$ .

- 11.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \sin 2t$ ,  $x_2(t) = \sin t$  e  $x_3(t) = t^2$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = it^4 - t^2$  su  $V$ .
- 12.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \cos t$ ,  $x_2(t) = \cos^2 t$  e  $x_3(t) = t$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = i$  su  $V$ .
- 13.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = \cos 2t$ ,  $x_2(t) = \cos^2 t$  e  $x_3(t) = i$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = t + 1$  su  $V$ .
- 14.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-1, 1)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = 1$  e  $x_3(t) = t^3$ . Calcolare la proiezione della funzione  $x(t) = i - t^2$  su  $V$ .
- 15.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = 1$ ,  $x_2(t) = \cos t$ ,  $x_3(t) = \cos^2 t$ ,  $x_4(t) = \cos^3 t$ . Calcolare la distanza  $L^2$  della funzione  $x(t) = \sin^2 t - i \sin t$  da  $V$ .
- 16.** Sia  $V$  il sottospazio di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato dalle funzioni  $x_1(t) = 1$ ,  $x_2(t) = \cos t$ ,  $x_3(t) = \cos^2 t$ ,  $x_4(t) = \cos^3 t$ . Calcolare la distanza  $L^2$  della funzione  $x(t) = \sin^2 t - 2i \sin t$  da  $V$ .
- 17.** Calcolare la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  della funzione  $x(t) = i \cos t - \sin 3t$  dallo spazio  $V$  generato da  $x_1(t) = \sin 5t$ ,  $x_2(t) = \sin 4t \cos t$ ,  $x_3(t) = i - 2$ .
- 18.** Calcolare la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  della funzione  $x(t) = (3 - 4i)e^{it}$  dallo spazio  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato da  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = t^2$ ,  $x_3(t) = (i + 1) \cos t$ .
- 19.** Calcolare la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  della funzione  $x(t) = 7i - 11$  dallo spazio  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato da  $x_1(t) = \cos 2t$ ,  $x_2(t) = e^{-2it}$ ,  $x_3(t) = \cos 3t \sin t$ .
- 20.** Calcolare la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  della funzione  $x(t) = i + \cos 2t$  dallo spazio  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato da  $x_1(t) = \sin 2t$ ,  $x_2(t) = e^{-2it}$ ,  $x_3(t) = 2 \cos 3t \sin t$ .
- 21.** Calcolare la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  della funzione  $x(t) = i + \cos 2t$  dal sottospazio  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato da  $x_1(t) = \sin 5t$ ,  $x_2(t) = \sin 4t \cos t$ ,  $x_3(t) = i - 2$ .
- 22.** Calcolare la distanza in  $L^2(-\pi, \pi)$  della funzione  $x(t) = i + \cos 5t$  dal sottospazio  $V$  di  $L^2(-\pi, \pi)$  generato da  $x_1(t) = e^{5it}$ ,  $x_2(t) = \sin 4t \cos t$ ,  $x_3(t) = e^{-5it}$ .