
Serie numeriche e serie di potenze

Sommare un numero finito di numeri reali è senza dubbio un'operazione che non può riservare molte sorprese. Cosa succede però se ne sommiamo un numero infinito? Prima di dare delle definizioni precise facciamo qualche piccolo esperimento. Se sommiamo i numeri interi positivi otteniamo

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \rightarrow +\infty.$$

Se modifichiamo questa somma nel seguente modo

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

la risposta è meno banale. Per trovarla abbiamo bisogno di osservare il comportamento delle somme parziali

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -1 &= 1 - 2 \\ 2 &= 1 - 2 + 3 \\ -2 &= 1 - 2 + 3 - 4 \\ 3 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ -3 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Notiamo che una parte delle somme cresce verso $+\infty$ mentre l'altra decresce verso $-\infty$ e dunque il loro comportamento complessivo è indeterminato. Se invece sommiamo infiniti zeri

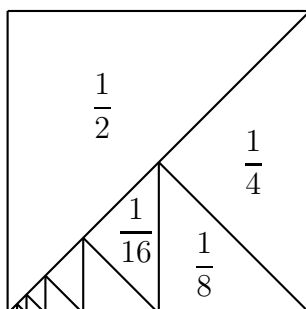
$$0 + 0 + 0 + \dots \rightarrow 0.$$

In quest'ultimo caso il risultato dell'“operazione” di somma infinita è un numero finito. C'è un esempio più interessante? È chiaro che se vogliamo avere la speranza di trovarne una dobbiamo almeno fare in modo che il termine che via via viene aggiunto tenda a zero. Consideriamo per esempio la somma delle potenze positive di $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Esiste il limite di questa somma e se esiste siamo in grado di calcolarlo? Nel corso di questo capitolo ci occuperemo proprio di questo genere di problemi. Intanto possiamo dare una risposta in questo caso particolare utilizzando un ragionamento geometrico.

In un quadrato di lato 1 vengono via via “ritagliati” dei triangoli rettangoli le cui aree corrispondono proprio ai termini della somma che stiamo esaminando.



Questi infiniti triangoli esauriscono la superficie del quadrato e dunque la somma infinita delle loro aree è uguale all'area totale del quadrato ossia 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \rightarrow 1.$$

1. DEFINIZIONI E PRIME PROPRIETÀ

Precisiamo meglio il linguaggio che intendiamo usare. Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, la loro somma fino al termine N -esimo è detta *somma parziale di ordine N*

$$s_N = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Per evitare eventuali fraintendimenti ($+\dots+$?) e rendere la scrittura più comoda e sintetica, una somma parziale si può scrivere anche in questo modo

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

dove \sum è il simbolo di sommatoria e rappresenta un "ciclo" di somme di termini a_n con l'indice intero n che varia dal numero scritto in basso, 0, al numero scritto in alto, N . La successione delle somme parziali $\{s_N\}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ costituisce la *serie* dei termini a_n . Determinare il *carattere* della serie significa studiare il limite della successione delle somme parziali:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

In particolare avremo questi tre casi:

CARATTERE DI UNA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{la serie converge con somma } L \\ +\infty \text{ o } -\infty & \text{la serie diverge} \\ \text{non esiste} & \text{la serie è indeterminata} \end{cases}$$

Nel caso si debbano fare operazioni tra serie, dato che sono dei limiti, dovremo fare particolare attenzione. Per esempio la seguente serie è evidentemente divergente a $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty.$$

Ora proviamo a fare la seguente operazione

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + 8 + \dots - (1 + 2 + 4 + \dots) = -1.$$

Quindi sembra di poter concludere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = (2 - 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.$$

Questo “imbarazzante” risultato è dovuto al fatto che non ci siamo accorti della presenza di una forma indeterminata ($+\infty - \infty$). Le combinazioni lineari di serie si possono però fare quando le serie in gioco sono convergenti:

| LINEARITÀ | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Siano | $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie convergenti. Allora converge anche |
| la serie | $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Inoltre |
| $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$ | |

Concludiamo questa sezione con qualche utile osservazione sul carattere di una serie. Intanto è piuttosto semplice convincersi che la convergenza di una serie dipende solo dalla “coda” dei termini che sommiamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge se e solo se } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,}$$

dove n_0 è un qualunque numero intero positivo. Quindi al fine di determinare il carattere di una serie si possono trascurare i “primi” termini (anche se questo potrebbe cambiare il valore della somma).

Un primo semplice criterio per determinare se una serie non converge è quello di verificare se il termine generico della serie non è infinitesimo. Infatti, se la serie converge, la successione delle somme parziali s_N converge ad un limite finito S e

$$a_N = s_N - s_{N-1} \rightarrow S - S = 0.$$

Quindi possiamo dire che

CRITERIO DI NON CONVERGENZA

Se $a_n \not\rightarrow 0$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non è convergente.

Vedremo nelle prossime sezioni che questa condizione è solo necessaria e non sufficiente ossia esistono esempi di serie che non convergono ma il cui termine generico è infinitesimo.

2. LA SERIE GEOMETRICA

La *serie geometrica* di ragione $x \in \mathbb{R}$ è la serie delle potenze intere di x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Per determinare il carattere di questo particolare tipo di serie dobbiamo studiarne le somme parziali

$$s_N = 1 + x + \cdots + x^N = \sum_{n=0}^N x^n.$$

Se $x = 1$ allora $s_N = 1 + 1 + \cdots + 1 = N + 1$ e quindi per $N \rightarrow \infty$ la serie diverge a $+\infty$. Se $x \neq 1$, notiamo che se moltiplichiamo s_N per $x - 1$ otteniamo

$$(x - 1) \cdot (1 + x + \cdots + x^N) = (x + \cdots + x^N + x^{N+1}) - (1 + x + \cdots + x^N)$$

e semplificando i termini opposti si ha che

$$(x - 1) \cdot (1 + x + \cdots + x^{N-1}) = x^{N+1} - 1.$$

Quindi se $x \neq 1$

$$s_N = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}.$$

A questo punto il calcolo del limite per $N \rightarrow \infty$ diventa più semplice perché basta studiare il comportamento del termine x^{N+1} . Dato che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

la risposta completa al problema della determinazione del carattere di una serie geometrica è la seguente

| | |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| SERIE GEOMETRICA | |
| $\sum_{n=0}^{\infty} x^n =$ | $\left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{array} \right.$ |

Esempio 2.1 La serie di cui abbiamo parlato nell'introduzione è proprio la serie geometrica di ragione $x = \frac{1}{2}$ con la sola differenza che in questo caso la somma parte dall'indice 1 e non da 0:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dato che $|\frac{1}{2}| < 1$ la serie converge e per determinarne la somma basta osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$

Dunque utilizzando la formula generale ritroviamo il risultato che avevamo dedotto con il ragionamento geometrico:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Esempio 2.2 A quale numero razionale corrisponde $0.1\bar{6} = 0.16666\dots$?

$$\begin{aligned} 0.1\bar{6} &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \dots\right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n. \end{aligned}$$

Dato che $|\frac{1}{10}| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Quindi

$$0.1\bar{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{6}.$$

Esempio 2.3 Calcolare

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}}.$$

Cerchiamo di ricondurre questa serie ad una serie geometrica notando che $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n.$$

Il numero $\frac{1}{3}$ moltiplica ogni termine della serie e dunque può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n.$$

A questo punto la serie da determinare è la serie geometrica di ragione $-\frac{1}{9}$ con l'indice n che parte da 2 (e non da 0). Se si osserva che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n - \left(-\frac{1}{9}\right)^0 - \left(-\frac{1}{9}\right)^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n - 1 + \frac{1}{9},$$

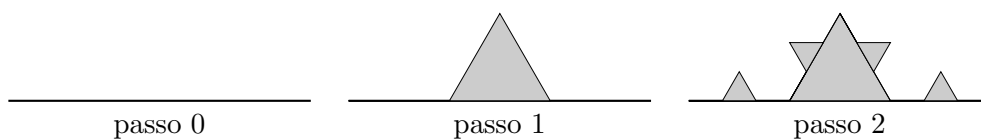
allora

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n - 1 + \frac{1}{9} \right).$$

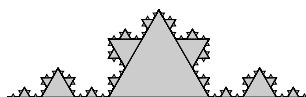
Dato che $|\frac{1}{9}| < 1$ abbiamo che la serie converge e la sua somma vale:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{9}} - 1 + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{270}.$$

Esempio 2.4 Consideriamo un segmento di lunghezza 1 (passo 0) e “incolliamo” al centro un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{3}$ (passo 1). Al passo successivo aggiungiamo al centro di ciascun lato (ora sono 4) un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{9}$ (passo 2).



Continuando indefinitamente questo procedimento generiamo una figura geometrica dal bordo sempre più frastagliato.



Calcoliamo l'area di questa figura. Denotiamo con A_N l'area della figura al passo N così

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{36}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Inoltre ad ogni passo successivo il numero di triangoli aggiunti aumenta, rispetto al passo precedente, di un fattore 4 mentre la loro area diminuisce di un fattore $\frac{1}{9}$. Ne segue che

$$A_N = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

e al limite

$$A_\infty = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Provate a verificare che al limite il perimetro tende a $+\infty$.

3. SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Se i termini a_n di una serie sono maggiori o uguali a zero allora lo studio del carattere della serie risulta essere in qualche modo piú semplice. Notiamo infatti che la successione delle somme parziali in questo caso è crescente in quanto

$$s_{N+1} \geq s_N + a_N \geq s_N$$

e dunque, quando calcoliamo la somma della serie passando al limite, i possibili risultati sono solo due: la serie converge ad un numero non negativo oppure la serie diverge a $+\infty$. La semplice osservazione che le serie a termini non negativi non possono essere indeterminate ci permette di enunciare il primo criterio di convergenza.

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{per } n \geq n_0.$$

Allora

(1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Cerchiamo di applicare questo criterio per dimostrare che la *serie armonica* diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Per farlo scriviamo i primi termini della somma e raggruppiamoli opportunamente. Poi “costruiamo” una nuova serie che minori la serie armonica sostituendo ogni termine di ciascun gruppo con un numero piú piccolo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\
 1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}} + \dots & = & +\infty
 \end{array}$$

Quindi la serie minorante diverge e per il punto (2) del criterio del confronto anche la serie armonica diverge (anche se il suo termine generico $\frac{1}{n}$ è infinitesimo!).

Un altro ragionamento per confronto si può fare per determinare il carattere della *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

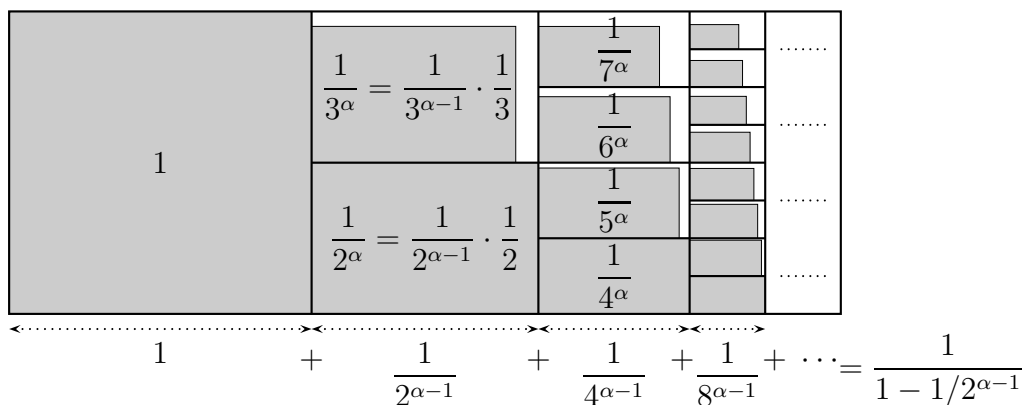
dove $\alpha \in \mathbb{R}$. L'eventuale convergenza dipende dall'esponente: $\alpha = 1$ è il valore critico oltre il quale la serie converge:

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| SERIE ARMONICA GENERALIZZATA | |
| $ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases} $ | |

Per verificare la divergenza nel caso $\alpha < 1$ basta semplicemente osservare che per $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ e quindi

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Dunque, per il criterio del confronto, la divergenza di questa serie deriva dalla divergenza della serie armonica. Per provare la convergenza nel caso $\alpha > 1$ si può ancora ricorrere al criterio del confronto. Senza entrare in dettagli, qui ci limiteremo solo a dare un'idea della dimostrazione attraverso un'“immagine” geometrica.



I termini della serie armonica generalizzata corrispondono alle aree dei rettangoli ombreggiati. Tali rettangoli vengono incasellati a gruppi di potenze di due all'interno di un rettangolo di altezza 1 e base uguale alla somma della serie geometrica di ragione $1/2^{\alpha-1}$. Se $\alpha > 1$ allora $|1/2^{\alpha-1}| < 1$ e la serie geometrica converge. Possiamo così concludere che l'area del rettangolo "contenitore" è finita e dunque è finita anche la somma infinita dei rettangoli contenuti.

Un problema ben più complicato è stabilire la somma della serie armonica generalizzata. Per curiosità diamo la somma solo per $\alpha = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Un risultato di convergenza più generale del precedente che ci capiterà di utilizzare è il seguente:

| SERIE ARMONICA GENERALIZZATA II | |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ | $= \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$ |

L'analisi che abbiamo compiuto per queste serie è stata piuttosto faticosa, e per continuare con esempi più complicati abbiamo bisogno di altri criteri di convergenza che siano più facili da usare. Cominciamo con il criterio del confronto asintotico.

| CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie tali che $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ per $n \geq n_0$ e | |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty]$ | |
| Allora | |
| (1) Se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. | |
| (2) Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. | |
| (3) Se $0 < L < +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. | |
| Nel caso (3) le due serie si dicono <i>asintoticamente equivalenti</i> . | |

Vediamone subito qualche applicazione.

Esempio 3.1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 2}}.$$

Dopo aver verificato che la serie è a termini non negativi proviamo a fare un'analisi asintotica del termine generico ossia a determinare il suo ordine di infinitesimo

$$\sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 2}} \sim \sqrt[7]{\frac{n^6}{n^{15}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{n^9}} = \frac{1}{n^{9/7}}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica con $\alpha = \frac{9}{7} > 1$ che converge. Dunque per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta converge.

Esempio 3.2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2.$$

La serie è a termini non negativi. Ora facciamo l'analisi asintotica del termine generico: ricordando che $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per x che tende a 0, si ha che

$$n^3 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim n^3 \cdot \left(\frac{1}{2n^2}\right)^2 \sim \frac{1}{4n}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica con $\alpha = 1$ che diverge. Dunque per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta diverge.

Esempio 3.3 Determinare il carattere della serie al variare del parametro reale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+3)! - \log n!}{n \log^a(n+6)}$$

La serie è a termini non negativi e l'analisi asintotica del termine generico ci da:

$$\frac{\log(n+3)! - \log n!}{n \log^a(n+6)} = \frac{\log((n+3)!/n!)}{n \log^a(n+6)} \sim \frac{\log(n^3)}{n(\log n)^a} \sim \frac{3}{n(\log n)^{a-1}}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica generalizzata con $\alpha = 1$ e $\beta = a - 1$, dunque per il criterio del confronto asintotico la serie proposta converge se e solo se $\beta > 1$ ossia se $a > 2$.

Vediamo altri due criteri di convergenza la cui dimostrazione è basata sul confronto con una serie geometrica.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n > 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà una risposta e la serie potrebbe sia convergere che divergere.

Esempio 3.4 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0.$$

Quindi il limite è minore di 1 e la serie converge.

Esempio 3.5 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

Dato che $\frac{1}{e} < 1$, la serie converge.

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà una risposta e la serie potrebbe sia convergere che divergere.

Esempio 3.6 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{(2n^2)^{1/n}} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0.$$

Il limite è minore di 1 e quindi la serie converge.

Notiamo che l'applicazione del criterio del rapporto o della radice alla serie armonica generalizzata è inefficace perché in entrambi i casi il limite è 1 qualunque sia il valore dell'esponente α :

$$\frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \rightarrow 1.$$

(si ricorda che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$). Concludiamo con un esempio dove si utilizza una tecnica "mista".

Esempio 3.7 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{n^3 - \cos n}.$$

Dopo aver osservato che la serie è a termini positivi ($n^3 > \cos n$ per $n \geq 1$) facciamo un'analisi asintotica

$$\frac{2^n + 5^n}{n^3 - \cos n} \sim \frac{5^n}{n^3}.$$

Quindi studiare la serie data è equivalente a studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}.$$

Questa diverge perchè applicando il criterio della radice troviamo che

$$\sqrt[n]{\frac{5^n}{n^3}} = \frac{5}{(\sqrt[n]{n})^3} \rightarrow 5 > 1.$$

4. SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

Qui discuteremo due criteri che possono aiutare lo studio della convergenza quando i termini della serie non hanno segno costante. Il primo prevede di studiare la serie a termini non negativi ottenuta prendendo i valori assoluti dei termini della serie data.

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Anche se non ne diamo una dimostrazione, possiamo dire che se avessimo la libertà di modificare a piacere il segno di ogni termine, la serie dei valori assoluti rappresenterebbe il caso “peggiore” per avere la convergenza: in questo caso infatti le somme crescono andando in un’unica direzione mentre se i segni sono variabili le somme si possono compensare.

Esempio 4.1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \log(1 + n^n)}.$$

Il segno dei termini è variabile per la presenza di $\sin n$ (e la distribuzione dei segni è piuttosto “irregolare”). La serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n \log(1 + n^n)},$$

inoltre per confronto

$$0 \leq \frac{|\sin n|}{n \log(1 + n^n)} \leq \frac{1}{n \log(1 + n^n)} \sim \frac{1}{n \log(n^n)} = \frac{1}{n^2 \log n}.$$

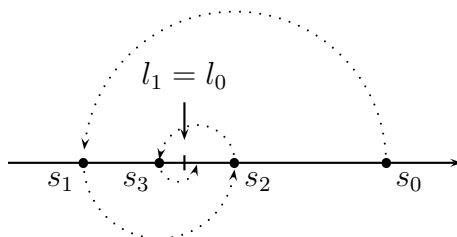
La serie individuata dai termini $\frac{1}{n^2 \log n}$ converge (serie armonica generalizzata II con $\alpha = 2$ e $\beta = 1$), e quindi converge anche la serie dei valori assoluti. Per il criterio appena enunciato anche la serie data converge.

Se la serie non è *assolutamente convergente* allora la determinazione del carattere della serie può essere molto complicato. Basti pensare che per queste serie modificare l'ordine in cui vengono sommati i termini può influenzare la somma della serie stessa. Comunque, nel caso in cui i segni siano "esattamente" alternati vale il seguente criterio.

| CRITERIO DI LEIBNITZ | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Sia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$ per $n \geq n_0$ e | |
| (1) a_n tende a zero; | |
| (2) a_n è decrescente ossia $a_n \geq a_{n+1}$ per $n \geq n_0$. | |
| Allora la serie converge. | |

Vediamone la dimostrazione. Dato che i termini a_n sono decrescenti al crescere di n e vengono alternativamente sommati e sottratti, le somme parziali oscillano sull'asse reale nel seguente modo

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = s_0 - a_1, \quad s_2 = s_1 + a_2, \quad s_3 = s_2 - a_3, \dots$$



In particolare si può facilmente osservare che le somme parziali di indice pari s_{2N} decrescono mentre quelle di indice dispari s_{2N+1} crescono

$$s_{2N} = s_{2N-2} - (a_{2N-1} - a_{2N}) \leq s_{2N-2}, \quad s_{2N+1} = s_{2N-1} + (-a_{2N+1} + a_{2N}) \geq s_{2N-1}.$$

Inoltre siccome

$$s_1 \leq s_{2N+1} = s_{2N} - a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq s_0$$

possiamo dire che la successione di indice pari s_{2N} tende ad un limite l_0 mentre la successione di indice dispari tende ad un limite l_1 :

$$s_{2N+1} \uparrow l_1 \leq l_0 \downarrow s_{2N}.$$

Per dimostrare che la serie converge basta verificare che questi due limiti l_1 e l_2 sono uguali. Dalla relazione

$$s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1}$$

passando al limite e ricordando che la successione a_n è infinitesima si ottiene proprio che $l_1 = l_2$ e il valore comune è proprio la somma della serie.

Esempio 4.2 Determinare il carattere della serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Se prendiamo la serie dei valori assoluti la serie diventa la serie armonica che è divergente. Quindi il criterio della convergenza assoluta non ci dà alcuna informazione utile. Se applichiamo invece il criterio di Leibnitz otteniamo facilmente la convergenza della serie data perché

$$\frac{1}{n} \text{ decresce e tende a } 0.$$

In seguito vedremo che la somma di questa serie è uguale a $\log 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \rightarrow \log 2.$$

È sorprendente notare che se in questa serie cambiamo l'ordine in cui i termini vengono sommati possiamo ottenere una serie che converge ad una somma diversa! Per esempio, si può dimostrare che questo fenomeno accade se si alternano *due* termini di indice dispari e *uno* di indice pari:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \rightarrow \frac{3}{2} \log 2.$$

Esempio 4.3 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n} + n \log n}.$$

Intanto osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e poi verifichiamo se la serie converge assolutamente.

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + n \log n} \right| = \frac{1}{\sqrt{n} + n \log n} \sim \frac{1}{n \log n}.$$

Per quanto detto questa serie diverge e dunque la serie data non converge assolutamente. Dato che la serie è a segni alterni, proviamo allora ad applicare il criterio di Leibnitz:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + n \log n} \text{ decresce e tende a } 0$$

e quindi la serie data converge.

5. SERIE DI POTENZE

Fino a questo momento abbiamo considerato serie numeriche ossia somme infinite di numeri reali, qui invece parleremo di uno degli esempi più importanti di serie di

funzioni: le *serie di potenze*. In realtà ne abbiamo già incontrato un esempio ossia la serie geometrica di ragione x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

In particolare abbiamo visto che se viene assegnato un certo numero x la serie corrispondente converge ad un numero finito solo se $|x| < 1$. Questo risultato può essere riletto nel seguente modo: la serie in questione definisce una funzione della variabile x il cui dominio D è l'insieme in cui la serie converge, ossia l'intervallo aperto di centro 0 e raggio 1: $D = (-1, 1)$. Le serie di potenze sono "centrate" in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e la potenza n -esima viene moltiplicata per un coefficiente reale a_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Anche in questo caso si pone innanzi tutto il problema della determinazione del dominio di questa nuova funzione. Si verifica che il dominio è ancora un intervallo (centrato in x_0) di un certo raggio R (detto di convergenza). Il calcolo di tale raggio si può effettuare nel seguente modo.

| RAGGIO DI CONVERGENZA | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. | |
| (1) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n } = L \in [0, +\infty]$ allora $R = 1/L$. | |
| (2) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = L \in [0, +\infty]$ allora $R = 1/L$. | |

La dimostrazione nel primo caso è una semplice applicazione del criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n.$$

Infatti calcolando il limite per n che tende a ∞ del rapporto tra due termini successivi si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}| |x - x_0|^{n+1}}{|a_n| |x - x_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| \rightarrow L \cdot |x - x_0|$$

Quindi si ha la convergenza (assoluta) se $L \cdot |x - x_0| < 1$, ossia se

$$|x - x_0| < \frac{1}{L} = R$$

(se $L = +\infty$ si pone $R = 0$, mentre se $L = 0$ si pone $R = +\infty$). La serie invece non converge se $L \cdot |x - x_0| > 1$, ossia se

$$|x - x_0| > \frac{1}{L} = R.$$

In modo simile applicando il criterio della radice si ottiene il secondo caso.

La determinazione del raggio di convergenza, come suggerisce la dimostrazione precedente, non dà alcuna informazione sul carattere della serie agli estremi del dominio quando $|x - x_0| = R$ (ossia quando $L \cdot |x - x_0| = 1$). Per dare una risposta in questi casi basterà studiare le serie numeriche corrispondenti sostituendo a x i valori $x_0 + R$ e $x_0 - R$.

Esempio 5.1 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \cdot (x - 1)^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza utilizzando per esempio la formula con il rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{(n+1) 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

quindi il raggio di convergenza è 2 e il dominio di convergenza D contiene l'intervallo aperto di centro $x_0 = 1$ e raggio $R = 2$ ossia l'intervallo $(-1, 3)$. Vediamo che cosa succede negli estremi -1 e 3 :

Se $x = -1$ allora $x - 1 = -2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \cdot (x - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n},$$

che converge per il criterio di Leibnitz e quindi $-1 \in D$.

Se $x = 3$ allora $x - 1 = 2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \cdot (x - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge a $+\infty$ e quindi $3 \notin D$. Il dominio di convergenza è $D = [-1, 3)$.

Esempio 5.2 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) \cdot x^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza utilizzando la formula con la radice n -sima:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{3n} + 3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8^n + 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9^n} = 9$$

quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{9}$. Il dominio di convergenza D , dunque, contiene l'intervallo aperto di centro $x_0 = 0$ e raggio $R = \frac{1}{9}$ ossia l'intervallo $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Vediamo cosa succede negli estremi $-\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{9}$:

Se $x = -\frac{1}{9}$ allora la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{8}{9} + 1\right)^n$$

che non converge perché il termine della serie non tende a 0. Allo stesso modo la serie non converge neanche per $x = \frac{1}{9}$. Dunque il dominio di convergenza è $D = (-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$.

In alcuni casi è possibile determinare, oltre al calcolo del dominio, anche la somma della serie. Qui riassumiamo gli esempi più importanti di serie di potenze per le quali la somma è una funzione esplicita. Come si può notare, in questi casi le serie corrispondono proprio agli sviluppi di Taylor della funzione rispetto ai loro centri. Ciò significa che per queste funzioni lo sviluppo di Taylor non serve solo ad “approssimare” i valori della funzione vicino al centro, ma su tutto il dominio della serie.

| PRINCIPALI SERIE DI POTENZE | | |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------|
| $\frac{1}{1-x}$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ | per $x \in D = (-1, 1)$ |
| e^x | $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | per $x \in D = \mathbb{R}$ |
| $\log(1+x)$ | $= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ | per $x \in D = (-1, 1]$ |
| $\sin x$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | per $x \in D = \mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | per $x \in D = \mathbb{R}$ |
| $\arctan x$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | per $x \in D = [-1, 1]$ |

Esempio 5.3 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n!}.$$

Dopo aver verificato la sua convergenza possiamo intanto separare la serie in due parti

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+5)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)+6}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 6 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}.$$

La prima serie può essere riscritta così

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(questi due “cicli” sommano gli stessi numeri!). Analogamente la seconda serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 6 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 \right) = 7 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) - 6.$$

Ora possiamo utilizzare la serie di potenze relativa a e^x per $x = 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n!} = 7e - 6.$$

Vale la pena notare che le considerazioni fatte per le serie di potenze reali si estendono anche nel campo complesso: il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è questa volta un disco in \mathbb{C} centrato in z_0 e raggio R . Si osservi che rispetto al caso reale l'analisi della convergenza nei punti del bordo del dominio può diventare più complicata perché ci sono infiniti punti da esaminare.

Esempio 5.4 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3} \right)^n.$$

Dato che $|i/3| = 1/3 < 1$, $i/3$ sta nel dominio di convergenza della serie geometrica in questione. La somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{i}{3}} - 1 = \frac{i}{3 - i} = \frac{3i - 1}{10}.$$