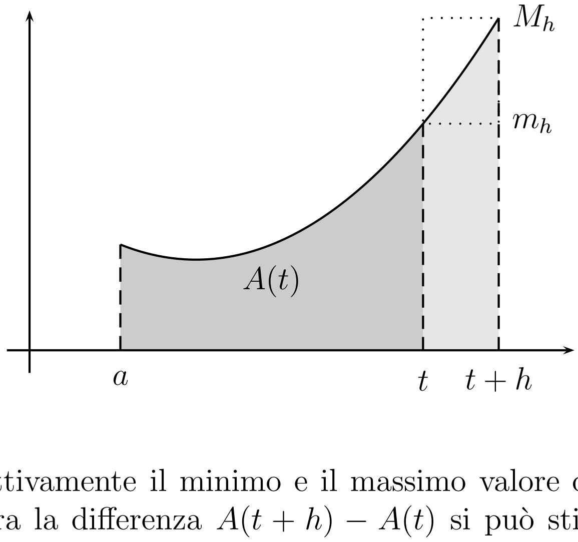
3

Calcolo Integrale

Nello studio del calcolo differenziale si è visto come si può associare ad una funzione la sua derivata. Il calcolo integrale si occupa del problema inverso: data una funzione f è possibile determinare una funzione F tale che

$$F'(x) = f(x)\ ?$$

Una funzione F con questa proprietà si dice *primitiva* di f. Ad esempio la funzione $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ è una primitiva di $f(x) = x$. Ricordando che la derivata di una funzione costante è identicamente zero, si capisce che il problema di "anti-derivazione" se ha almeno una soluzione ne ha automaticamente infinite: se F è una primitiva di f allora anche $F + c$ è una primitiva per qualunque scelta della costante reale c. Anzi si può dimostrare che in questo modo si individuano tutte le possibili primitive di una funzione data. Lo sviluppo di tecniche che permettono la "ricostruzione" della primitiva di una funzione ha un'applicazione fondamentale: il calcolo di aree di figure piane. Consideriamo infatti una funzione continua f definita su un certo insieme $[a, b]$ e e supponiamo di poter assegnare un'area al "trapezoide" limitato dal grafico di f, dall'asse delle x, dalla retta $x = a$ e dalla retta $x = t$ con $t \in [a, b]$. Denotiamo questa funzione con $A(t)$ (che in seguito chiameremo funzione integrale) e proviamo a calcolarne la derivata. Variando la posizione di t, da t a $t+h$, la differenza $A(t+h)-A(t)$ corrisponde all'area del trapezoide che ha per base l'intervallo $[t, t + h]$.



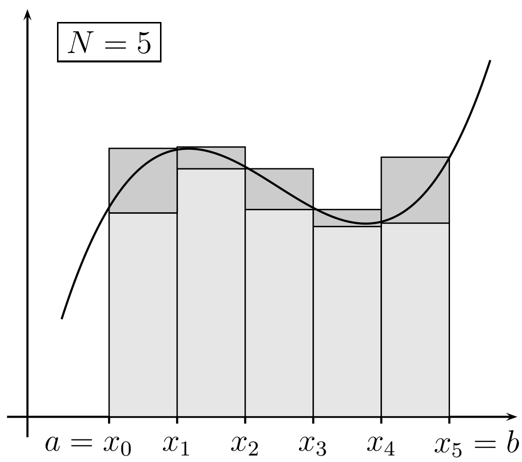
Siano m_h e M_h rispettivamente il minimo e il massimo valore della funzione sull'intervallo $[t, t + h]$ allora la differenza $A(t + h) - A(t)$ si può stimare con le aree dei rettangoli di base $[t, t + h]$ e altezze m_h e M_h.

$$m_h \cdot h \leq A(t + h) - A(t) \leq M_h \cdot h.$$

Quindi
$$m_h \leq \frac{A(t+h)-A(t)}{h} \leq M_h.$$
Facendo tendere h a zero, dato che f è continua (per funzioni più irregolari la situazione è più complicata) i numeri M_h e m_h tendono a $f(t)$ (ossia al massimo e al minimo di f nell'intervallo "contratto" costituito dal solo punto t). Quindi $A'(t) = f(t)$ e A è una primitiva di f.

1. Definizione di integrale

Nell'introduzione abbiamo parlato della possibilità di assegnare un'area ad un trapezoide. Ora precisiamo meglio come va intesa questa affermazione. Supponiamo che f sia una funzione limitata definita su un insieme $[a, b]$ L'idea è di "approssimare" l'area del trapezoide con delle unioni di rettangoli. Suddividiamo $[a, b]$ in N sotto-intervalli di ampiezza uniforme inserendo i seguenti punti
$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{N} \quad \text{con } n = 0, 1, \cdots, N.$$
Ora costruiamo le due somme:
$$s_N = \sum_{n=1}^{N} m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} m_n$$
e
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} M_n.$$
dove
$$m_n = \inf \{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\} \quad \text{e} \quad M_n = \sup \{f(x) : x \in [x_{n-1}, x_n]\}.$$



Le somme s_N e S_N misurano le aree delle regioni formate dai rettangoli rispettivamente "iscritti" e "circoscritti" al grafico e quindi rappresentano la stima inferiore e superiore (di ordine N) dell'area da calcolare. L'area del trapezoide è definita se questo procedimento di approssimazione dal basso e dall'alto individua al limite un unico numero:

$$\lim_{N\to\infty} s_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \text{Area del trapezoide.}$$

In questo caso la funzione f si dice *integrabile* nell'intervallo $[a, b]$ e l'area del trapezoide si indica

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che si legge *integrale tra a e b di f in dx*. Il simbolo di integrale $\int$ è una S allungata che ricorda la costruzione con le somme che abbiamo appena descritto. Anche se non tutte le funzioni limitate sono integrabili, si può dimostrare che le funzioni continue lo sono e anzi, come abbiamo anticipato nell'introduzione, il problema del calcolo dell'integrale è direttamente correlato con la determinazione di una primitiva. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ allora

(1) la *funzione integrale*

$$[a, b] \ni t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$$

è una primitiva di f.

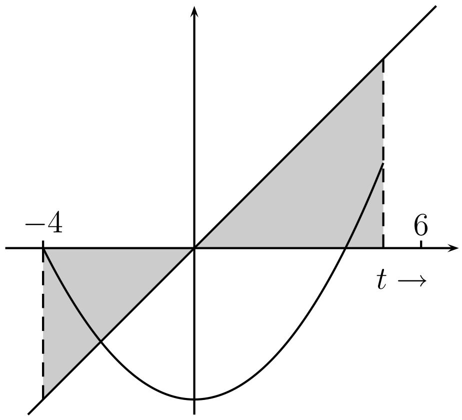
(2) Se F è una primitiva di f in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Esempio 1.1 Se $f(x) = x$ allora, come già osservato, una primitiva di f è la funzione $\frac{1}{2}x^2$. Allora la funzione integrale relativa ad esempio all'intervallo $[-4, 6]$ è uguale a

$$A(t) = \int_{-4}^t f(x)\,dx = F(t) - F(-4) = \frac{t^2}{2} - 8$$

Si noti che la crescenza/decrescenza della funzione integrale dipende dal segno della sua derivata ossia la funzione f. L'area sotto la curva, spaziata variando t, per $t = -4$ è nulla poi decresce diventando negativa (l'area è "contata" negativa se sta sotto l'asse delle x) e poi cresce da $t = 0$ diventando positiva per $t > 4$.



2. Calcolo delle primitive

In questa sezione svilupperemo alcune tecniche utili per individuare le primitive di una funzione continua. Per indicare l'insieme delle primitive di una funzione f si utilizza la seguente notazione:

$$\int f(x)\,dx$$

che si legge *integrale di $f(x)$ in dx*. È detto anche integrale "indefinito" perchè per ora vogliamo solo risolvere il problema della ricerca delle primitive e gli estremi di integrazione non ci interessano. Tornando al nostro esempio, possiamo allora scrivere

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

dove c è una costante arbitraria. Altri esempi si trovano nella seguente tabella.

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{per } \alpha \neq -1$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{per } a > 0$	
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{per } a > 0$	

Il controllo della validità di questi integrali si può fare in modo molto semplice: si deriva una primitiva e si verifica che il risultato ottenuto sia uguale alla funzione corrispondente nel suo dominio di definizione.

Esempio 2.1 Dalla tabella possiamo dedurre che

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Infatti

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2+x^2}.$$

Esempio 2.2 Determiniamo le primitive della funzione $|x|$, ossia calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int |x|\,dx.$$

In questo caso conviene distinguere due casi: per $x \geq 0$ abbiamo che

$$\int |x|\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1,$$

mentre per $x \leq 0$

$$\int |x|\,dx = \int (-x)\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + c_2.$$

Ora per scrivere le primitive di $|x|$ per $x \in \mathbb{R}$, dobbiamo tener presente che queste sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $c_1 = c_2$ e quindi

$$\int |x|\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & \text{per } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

Esempio 2.3 In modo simile all'esempio precedente possiamo calcolare le primitive anche di funzioni continue solo a tratti. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x > 1 \\ 3x^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}.$$

è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Le primitive per $x > 1$ sono

$$\int f(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c_1,$$

mentre per $x < 1$

$$\int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + c_2.$$

Ora per ottenere le primitive di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, stabiliamo la relazione tra le costanti in modo da raccordare le due primitive nel punto $x = 1$. Si deve verificare che $e^1 + c_1 = 1^3 + c_2$ e quindi $c_2 = e - 1 + c_1$. Così, per $x \in \mathbb{R}$,

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} e^x + c & \text{per } x > 1 \\ x^3 + e - 1 + c & \text{per } x < 1 \end{cases}.$$

Ora che abbiamo un po' di esempi di primitive proviamo a vedere come si integrano funzioni più complicate. Come vedremo le tecniche di integrazione sono una semplice conseguenza delle regole di derivazione. Rispetto al calcolo della derivata però, nel calcolo integrale spesso la difficoltà consiste nel capire quale tecnica particolare conviene usare: in fondo cercare una primitiva è come se, dopo aver derivato una funzione, uno cercasse di "ricostruirla" partendo dalla derivata!

La prima proprietà si deduce direttamente dalla linearità della derivazione

LINEARITÀ

Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\ dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Esempio 2.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2)\,dx.$$

Per la linearità abbiamo che

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 2)\,dx = 3\int \sqrt{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - 2\int\ dx$$

ora per determinare i singoli integrali possiamo ricorrere alla tabella

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int (x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c,$$

inoltre

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int (x)^{-2}\,dx = \frac{(x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

e infine

$$\int\ dx = \int 1\,dx = x + c.$$

Quindi, riportando la costante una sola volta,

$$\int (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2)\,dx = 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} - 2x + c.$$

La seconda proprietà è basata sulla regola di derivazione del prodotto:

Integrazione per parti

Se f e g sono funzioni derivabili allora

$$\int f(x)\, dg(x) = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, df(x).$$

infatti, ricordando che

$$df(x) = f'(x)\, dx \quad \text{e} \quad dg(x) = g'(x)\, dx,$$

la formula enunciata si verifica osservando che

$$\begin{aligned}\int f(x)\, dg(x) + \int g(x)\, df(x) &= \int \left(f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)\right)\, dx \\ &= \int \left(f(x)\, g(x)\right)'\, dx = f(x)\, g(x) + c.\end{aligned}$$

Esempio 2.5 Calcoliamo l'integrale

$$\int x\, \cos x\, dx.$$

Applichiamo la tecnica della integrazione per parti integrando prima il fattore $\cos x$ e portando il risultato nel differenziale

$$\begin{aligned}\int x\, \cos x\, dx &= \int x\, d(\sin x) = x\, \sin x - \int \sin x\, d(x) \\ &= x\, \sin x - (-\cos x) + c = x\, \sin x + \cos x + c.\end{aligned}$$

Notiamo che se si integrasse prima il fattore x allora l'integrale diventerebbe più complicato:

$$\begin{aligned}\int x\, \cos x\, dx &= \int \cos x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\, \cos x - \int \frac{x^2}{2}\, d(\cos x) \\ &= \frac{x^2}{2}\, \cos x + \frac{1}{2} \int x^2\, \sin x\, dx.\end{aligned}$$

La scelta del fattore "giusto" da integrare non è sempre semplice e alle volte è necessario fare più di un tentativo.

Esempio 2.6 Calcoliamo l'integrale

$$\int x^2\, e^x\, dx.$$

Integriamo prima il fattore e^x:

$$\begin{aligned}\int x^2\, e^x\, dx &= \int x^2\, d(e^x) = x^2\, e^x - \int e^x\, d(x^2) \\ &= x^2\, e^x - \int e^x\, 2x\, dx = x^2\, e^x - 2 \int x\, e^x\, dx.\end{aligned}$$

Il nuovo integrale non si può risolvere direttamente come nell' esempio precedente, ma comunque siamo sulla buona strada perché la parte polinomiale (il fattore x^2) si è abbassato di grado (è diventato x). Risolviamo l'integrale che manca in modo analogo:

$$\int x\,e^x\,dx = \int x\,d(e^x) = x\,e^x - \int e^x\,d(x) = x\,e^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2(x\,e^x - e^x + c) = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

Esempio 2.7 Calcoliamo l'integrale

$$\int \log x\,dx.$$

In questo caso per applicare l'integrazione per parti scegliamo come fattore da integrare la funzione costante 1 (che integrata dà x):

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int \log x\,d(x) = x\,\log x - \int x\,d(\log x)\\ &= x\,\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\,\log x - \int 1\,dx\\ &= x\,\log x - x + c\end{aligned}$$

La terza proprietà fornisce un'altra tecnica di calcolo e si ricava dalla regola di derivazione di una funzione composta:

> INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE
>
> Se g è derivabile allora posto $t = g(x)$
>
> $$\int f(g(x))\,dg(x) = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$
>
> dove F è una primitiva di f.

La formula si verifica osservando che

$$(F(g(x)))' = f(g(x))\,g'(x).$$

Esempio 2.8 Calcoliamo l'integrale

$$\int \tan x\,dx.$$

L'integrale dato si può scrivere nel modo seguente

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$$

Ora integriamo $\sin x$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x).$$

Quindi dobbiamo ancora integrare $1/t$ nella variabile $t = \cos x$ ossia

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c.$$

Esempio 2.9 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{2x\ \cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\,dx.$$

Come vedremo la funzione da integrare è la derivata di una funzione composta. L'integrazione per sostituzione permetterà la "ricostruzione" della funzione originale. Integriamo prima $2x$:

$$\int \frac{2x\ \cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\,dx = \int \frac{\cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\,d(x^2).$$

Poi integriamo $\cos(x^2)$ rispetto alla variabile x^2:

$$\int \frac{\cos(x^2)}{(1+\sin(x^2))^2}\,d(x^2) = \int \frac{1}{(1+\sin(x^2))^2}\,d(\sin(x^2)).$$

Infine, dopo aver "corretto" il differenziale aggiungendo la costante 1, integriamo $1/(1+\sin(x^2))^2$ rispetto alla variabile $1+\sin(x^2)$

$$\int \frac{1}{(1+\sin(x^2))^2}\,d(1+\sin(x^2)) = -\frac{1}{1+\sin(x^2)} + c.$$

Esempio 2.10 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$$

Alle volte la scelta del cambio di variabile può essere suggerita dalla struttura della funzione da integrare. In questo caso conviene porre $t = \sqrt{x}$:

$$t^2 = x \quad \text{e} \quad d(t^2) = 2t\,dt = dx.$$

Così sostituendo otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int \frac{t}{t-1}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t-1}\,dt.$$

Dato che $t^2 = (t+1)(t-1)+1$ (abbiamo diviso il polinomio t^2 per il polinomio $t+1$)

$$2\int \frac{t^2}{t-1}\,dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\,dt = t^2+2t+2\log|t-1|+c.$$

Quindi risostituendo $t=\sqrt{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx = x+2\sqrt{x}+2\log|\sqrt{x}-1|+c.$$

3. L'integrazione delle funzioni razionali

Se per l'integrazione di una generica funzione può essere difficile individuare la combinazione dei metodi da usare, per una funzione razionale ossia un rapporto di polinomi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

esiste un "algoritmo" completo che permette di determinare in ogni caso una primitiva. La complessità di questo algoritmo aumenta con il grado del polinomio $Q(x)$. Cominciamo quindi con il caso in cui il grado di $Q(x)$ è uguale a 1.

Esempio 3.1 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{4x^2+1}{2x+1}\,dx$$

Dato che il polinomio al numeratore ha grado maggiore di quello al denominatore, possiamo fare la divisione ottenendo

$$4x^2+1 = (2x-1)(2x+1)+2$$

Così

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+1}{2x+1}\,dx &= \int \frac{(2x-1)(2x+1)+2}{2x+1}\,dx\\ &= \int \left(2x-1+\frac{2}{2x+1}\right)\,dx = x^2-x+\log|2x+1|+c.\end{aligned}$$

Ora esamineremo il caso in cui il grado del polinomio $Q(x)$ sia di grado 2. A meno di fare una divisione, come nel caso dell'esempio precedente, possiamo supporre che il numeratore $P(x)$ sia di grado minore di 2. L'algoritmo distingue tre casi a seconda della natura delle radici del polinomio $Q(x)$.

Esempio 3.2 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx$$

Le radici di x^2+5x+6 sono due e distinte: -2 e -3. Decomponiamo la funzione razionale nel seguente modo:

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

dove A e B sono due costanti opportune. Svolgendo il calcolo otteniamo

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=-1$ e $B=2$.
Osserviamo che per trovare le costanti A e B possiamo anche ragionare così: se moltiplichiamo l'equazione

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

per $x+2$, dopo aver semplificato, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+3}=A+B\,\frac{x+2}{x+3}$$

e ponendo $x=-2$, troviamo immediatamente che $A=-1$. In modo analogo, se moltiplichiamo per $x+3$, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+2}=A\,\frac{x+3}{x+2}+B$$

e ponendo $x=-3$, troviamo che $B=2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx &= \int\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\right)dx\\ &= -\log|x+2|+2\log|x+3|+c\\ &= \log\frac{(x+3)^2}{|x+2|}+c.\end{aligned}$$

Esempio 3.3 Calcoliamo l'integrale

$$\int\frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx.$$

Il polinomio $x^2+4x+4=(x+2)^2$ ha un'unica radice: -2 di molteplicità due. Se poniamo $t=x+2$ allora $dt=dx$ e

$$\begin{aligned}\int\frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx=\int\frac{x+3}{(x+2)^2}\,dx &= \int\frac{t+1}{t^2}\,dt\\ &= \int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\log|t|-\frac{1}{t}+c\\ &= \log|x+2|-\frac{1}{x+2}+c.\end{aligned}$$

Esempio 3.4 Calcoliamo l'integrale
$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx.$$
Il polinomio x^2+2x+3 ha due radici complesse coniugate: $-1 \pm i\sqrt{2}$. Il primo passo consiste nel fare una sostituzione in modo da eliminare il termine di primo grado. In generale, per un polinomio ax^2+bx+c, questo si ottiene con una traslazione della variabile nel punto medio delle soluzioni ossia ponendo $t = x + \frac{b}{2a}$. Nel nostro caso con $t = x+1$ il polinomio x^2+2x+3 diventa t^2+2 e dunque
$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{4t-5}{t^2+2}\,dt = 4\int \frac{t}{t^2+2}\,dt - 5\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$
Risolviamo il primo integrale
$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^2+2}\,dt &= \int \frac{1}{t^2+2}\,d\left(\frac{t^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2}\,d(t^2+2)\\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+2)+c.\end{aligned}$$
L'assenza del termine di primo grado nel polinomio al denominatore ci permette di determinare subito il secondo integrale
$$\int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c.$$
Quindi, riunendo i risultati e tornando alla variabile x
$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx = 2\log(x^2+2x+3) - \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

Se il polinomio al denominatore $Q(x)$ ha grado maggiore di 2 allora bisogna determinarne una fattorizzazione completa (reale) ossia scriverlo come prodotto di fattori di primo grado e fattori di secondo grado irriducibili (con $\Delta < 0$) e quindi si "costruisce" la decomposizione della funzione razionale $P(x)/Q(x)$ come combinazioni lineari di frazioni più semplici:

(1) ad ogni fattore $(x-x_0)^n$ si associano le n *frazioni semplici*
$$\frac{1}{x-x_0},\ \frac{1}{(x-x_0)^2},\ \cdots,\ \frac{1}{(x-x_0)^n};$$

(2) ad ogni fattore irriducibile $(x^2+bx+c)^m$ si associano le $2m$ frazioni semplici
$$\frac{x}{x^2+bx+c},\ \frac{x}{(x^2+bx+c)^2},\ \cdots,\ \frac{x}{(x^2+bx+c)^m},$$
$$\frac{1}{x^2+bx+c},\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^2},\ \cdots,\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}.$$

Esempio 3.5 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x-1}{x^4+x^2}\,dx.$$

La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$$

Al fattore x^2 si associano le frazioni semplici

$$\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}$$

mentre al fattore irriducibile x^2+1 si associano le frazioni semplici

$$\frac{x}{x^2+1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2+1}.$$

Quindi la decomposizione è

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx}{x^2+1} + \frac{D}{x^2+1}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$$

e dunque

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=1$, $B=-1$, $C=-1$ e $D=1$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + c \\ &= \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} + \arctan x + c \end{aligned}$$

4. L'integrale definito

Ora che abbiamo un po' di pratica con la ricerca delle primitive calcoliamo qualche integrale definito ricordando il teorema fondamentale.

Esempio 4.1 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Prima determiniamo una primitiva della funzione da integrare

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.\end{aligned}$$

Quindi valutiamo

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}.$$

Esempio 4.2 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\log x}{x}\,dx.$$

In questo caso il calcolo procede integrando prima $1/x$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\log x}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \log x\, d\,(\log x) = \frac{1}{2}\left[\log^2 x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{1-(-1)^2}{2} = 0.$$

La presenza degli estremi di integrazione permette di individuare un'altra interessante proprietà: l'intervallo di integrazione può essere suddiviso.

ADDITIVITÀ RISPETTO ALL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE
Se f è integrabile in $[a,b]$ e $a \le c \le b$ allora $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si noti inoltre che se si invertono gli estremi di integrazione allora l'integrale cambia di segno

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esempio 4.3 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^3 |x^2-1|\,dx.$$

Conviene decomporre l'intervallo di integrazione inserendo un punto di suddivisione in 1 dove la funzione x^2-1 cambia segno. In questo modo possiamo "sbarazzarci" del valore assoluto:

$$\int_0^3 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3 = \frac{22}{3}.$$

Esempio 4.4 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_{-1}^1 (2x+1)\,\arctan x\,dx.$$

Prima applichiamo la linerità:

$$\int_{-1}^1 (2x+1)\,\arctan x\,dx = 2\int_{-1}^1 x\,\arctan x\,dx + \int_{-1}^1 \arctan x\,dx.$$

Ora osserviamo che la funzione $\arctan x$ è dispari ($f(-x)=-f(x)$) e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico rispetto all'origine $[-1,1]$ vale zero:

$$\int_{-1}^1 \arctan x\,dx = 0.$$

Inoltre, la funzione $x\,\arctan x$ è pari ($f(-x)=f(x)$) e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico $[-1,1]$ vale il doppio di quello su $[0,1]$:

$$\int_{-1}^1 x\arctan x\,dx = 2\int_0^1 x\arctan x\,dx.$$

Allora l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^1 (2x+1)\,\arctan x\,dx = 4\int_0^1 x\,\arctan x\,dx.$$

Proseguiamo il calcolo integrando per parti

$$\begin{aligned}
4\int_0^1 x\,\arctan x\,dx &= 4\int_0^1 \arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= 4\left[\frac{x^2}{2}\,\arctan x\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x^2}{2} d\left(\arctan x\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 x^2\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\left[x-\arctan x\right]_0^1 = \pi - 2.
\end{aligned}$$

5. L'integrale improprio

Nella sezione precedente abbiamo visto qualche calcolo di integrale definito. Le funzioni da integrare erano continue su tutto l'intervallo limitato $[a, b]$. Ora proviamo ad ampliare la definizione di integrale anche al caso in cui la funzione sia continua solo su $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se l'intervallo non è limitato ossia $b = +\infty$ si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se il limite esiste finito allora l'integrale *improprio* si dice *convergente* e la funzione si dice integrabile su $[a, b)$. Il caso in cui la funzione sia continua solo su $(a, b]$ è assolutamente analogo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Esempio 5.1 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sappiamo già che

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c.$$

Allora l'integrale improprio su $[1, +\infty)$ vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\log|x|]_1^{+\infty} = +\infty.$$

Inoltre l'integrale improprio su $(0, 1)$ vale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log|x|]_{0^+}^1 = +\infty.$$

In entrambi i casi gli integrali impropri non sono convergenti.

Esempio 5.2 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

con $\alpha > 0$ e diverso da 1. Abbiamo visto che

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c.$$

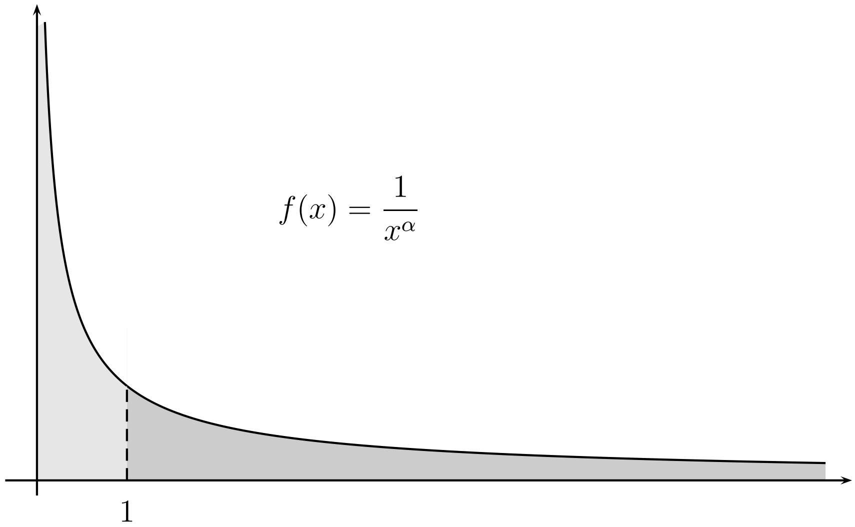
Allora l'integrale improprio su $[1, +\infty)$ vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale su $(1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > 1$.
Inoltre l'integrale improprio su $(0, 1)$ vale

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{0^+}^{1} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale su $(0, 1)$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$.



Esempio 5.3 Calcoliamo l'integrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} \quad \text{per } \beta \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \int \frac{1}{(\log x)^\beta}\,d(\log x) = \begin{cases} \dfrac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta} + c & \text{se } \beta \neq 1 \\ \log|\log x| + c & \text{se } \beta = 1 \end{cases}$$

L'integrale improprio su $(e, +\infty)$ vale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\beta > 1$.

Esempio 5.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{x|\log x|^\beta}\,dx \quad \text{per } \beta \in \mathbb{R}.$$

Se cambiamo variabile ponendo $y = 1/x$ possiamo ricondurre questo integrale improprio al precedente:

$$\int_{+\infty}^{e} \frac{y}{|\log 1/y|^\beta} \left(-\frac{dy}{y^2}\right) = \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{y(\log y)^\beta}\, dy = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\beta > 1$.

Esempio 5.5 Calcoliamo l'integrale improprio

$$\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\, dx$$

La funzione data è continua in $[e^3, +\infty)$. Per calcolare il valore dell'integrale improprio dobbiamo prima determinare una primitiva. Per $x > 0$

$$\int \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\, dx = \int \frac{1}{\log^2 x - 4}\, d(\log x) = \int \frac{1}{t^2 - 4}\, dt.$$

dopo aver posto $t = \log x$. Decomponiamo la funzione razionale

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{(t+2)(t-2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{t-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+2}.$$

Ora possiamo completare il calcolo della primitiva

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\, dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-2}\, dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+2}\, dt \\ &= \frac{1}{4}\log|t-2| - \frac{1}{4}\log|t+2| + c \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\log x - 2}{\log x + 2}\right| + c. \end{aligned}$$

Ora basta valutare la primitiva agli estremi di integrazione

$$\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{\log x - 2}{\log x + 2}\right|\right]_{e^3}^{+\infty} = 0 - \frac{1}{4}\log\left|\frac{3-2}{3+2}\right| = \frac{\log 5}{4}.$$

6. Criteri di convergenza per integrali impropri

In molti casi è possibile dire se un integrale improprio converge o meno senza affrontare il problema della "faticosa" determinazione di una primitiva. Esistono infatti dei *criteri di convergenza* del tutto simili a quelli già studiati per le serie (anche gli integrali sono delle "somme infinite").

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano f e g due funzioni continue tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per } x \in [a, b).$$

Allora

(1) Se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge allora anche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(2) Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora anche $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

Esempio 6.1 Proviamo che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

è convergente.
In questo caso la determinazione di una primitiva della funzione positiva e^{-x^2} sarebbe addirittura proibitiva (si dimostra infatti che esiste una primitiva, ma che questa non è esprimibile come composizione di funzioni elementari!). Il fatto che la funzione tenda a zero "molto velocemente" per $x \to +\infty$ ci suggerisce però di applicare il punto (1) del criterio del confronto. Si tratta allora di individuare una funzione che maggiori quella data e il cui integrale improprio sia convergente. La funzione e^{-x} ha proprio questa proprietà:

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{per } x \geq 1 \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}.$$

Quindi l'integrale dato è convergente e

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano f e g due funzioni continue positive $[a, b)$ tali che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Se $0 < L < +\infty$ ossia $f \sim g$ per $x \to b^-$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge.}$$

Per l'applicazione del criterio del confronto asintotico abbiamo bisogno di un "repertorio" di integrali impropri di cui conosciamo le proprietà di convergenza. Qui riassumiamo i risultati di cui avremo bisogno e che in parte sono già stati dimostrati negli esempi precedenti.

INTEGRALI IMPROPRI PRINCIPALI

(1) Se $a < b$ allora

$$\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

(2) Se $a > 1$ allora

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

(3) Se $a < 1$ allora

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Esempio 6.2 Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^5 \frac{1}{x^a (\log(1+x))^2}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.
La funzione data è continua sull'intervallo $(0, +\infty)$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$.
Cominciamo con $x \to 0^+$

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^5 \frac{1}{x^a (\log(1+x))^2} \sim \left(\frac{x}{2}\right)^5 \frac{1}{x^a (x)^2} \sim \frac{1}{x^{a+2-5}} = \frac{1}{x^{a-3}}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a 0^+ se $\alpha = a - 3 < 1$ ossia se $a < 4$. Vediamo cosa succede per $x \to +\infty$

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^5 \frac{1}{x^a (\log(1+x))^2} \sim \frac{1}{x^a (\log x)^2}.$$

Dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a \geq 1$ (l'esponente del logaritmo è $2 > 1$). Unendo le due condizioni abbiamo che $1 \leq a < 4$.

Esempio 6.3 Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt[5]{x}\,(\sin x)^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.
Per determinare la convergenza basta fare un'analisi asintotica agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to 0^+$

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a} \sim \frac{x^2/2}{x^{1/3}\,x^a} \sim \frac{1}{x^{a+1/3-2}} = \frac{1}{x^{a-5/3}}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a 0^+ se $\alpha = a - 5/3 < 1$ ossia se $a < 8/3$. Invece, per $x \to \pi^-$

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a} = \frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin(\pi - x))^a} \sim \frac{1}{(\pi - x)^a}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a π^- se $\alpha = a < 1$. Unendo le due condizioni abbiamo che $a < 1$.

Concludiamo con un cenno al problema della integrabilità impropria per una funzione di segno non costante. In questo caso infatti i criteri precedenti non sono applicabili. Vale però il seguente risultato (analogo a quello per le serie).

Criterio della convergenza assoluta
Se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Esempio 6.4 Proviamo che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

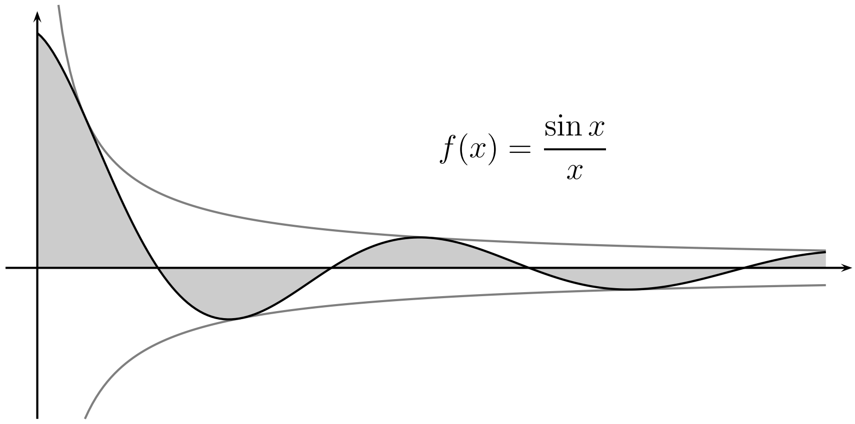
converge.
Per $x > 0$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2},$$

inoltre $1/x^2$ è integrabile in $[1, +\infty)$ e quindi per il criterio del confronto anche la funzione (positiva) $|\sin x/x^2|$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi l'integrale improprio converge per il criterio della convergenza assoluta. Si osservi che anche l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge, anche se il ragionamento precedente non è applicabile perchè la funzione $1/x$ non è integrabile in $[1, +\infty)$.



La convergenza si può invece spiegare osservando il grafico della funzione: si tratta di oscillazioni "modulate" dalle funzioni $\pm 1/x$. L'integrale improprio da calcolare è la serie i cui termini corrispondono alle aree delle singole "gobbe". Tali aree hanno segno alterno (perché stanno alternativamente sopra e sotto l'asse x) e decrescono in valore assoluto a zero (questa affermazione andrebbe dimostrata!). Quindi la serie (e anche l'integrale) converge per il criterio di Leibnitz.