

ESERCIZI SU SUP/INF/MAX/MIN

CONTENTS

1. ESERCIZI SU SUP/INF/MAX/MIN

1

[B] Dispense a cura del docente.

1. ESERCIZI SU SUP/INF/MAX/MIN

In quanto segue, dato $x \in \mathbb{R}$, indicheremo con $[x]$ la parte intera di x , ovvero il più grande intero minore o uguale a x .

Esercizio

Determinare gli estremi (massimi e minimi se esistono) dell'insieme

$$A = \{3^{-n} : n \in \mathbb{Z}\},$$

giustificando la risposta.

Soluzione

Si ha

$$\inf A = 0, \quad (1.1)$$

$$\sup A = +\infty. \quad (1.2)$$

Per la (1.1) osserviamo che $0 \leq 3^{-n}$. Quindi 0 è un minorante per A . Dimostriamo che si ha anche

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z} : 3^{-n_\varepsilon} < \varepsilon,$$

ovvero 0 è il massimo dei minoranti. Infatti

$$3^{-n} < \varepsilon \iff -n < \log_3 \varepsilon \iff n > \log_3 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Se ne deduce che $3^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$ non appena

$$n_\varepsilon \geq \left\lceil \log_3 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Per la (1.2) si tratta di far vedere che comunque dato $M \in \mathbb{R}$, allora M non è un maggiorante per A , ovvero che A non ha nessun maggiorante. È quindi sufficiente dimostrare che

$$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{Z} : 3^{-n_M} > M.$$

Infatti

$$3^{-n} > M \iff -n > \log_3 M \iff n < \log_3 \frac{1}{M}.$$

Se ne deduce che $3^{-n_M} > M$ non appena

$$n_M \leq \left\lfloor \log_3 \frac{1}{M} \right\rfloor - 1.$$

■

Esercizio

Determinare gli estremi (massimi e minimi se esistono) di

$$f(x) = 3^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sull'insieme $X = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$, giustificando la risposta.

Soluzione

Si ha

$$\inf_X f = f(\sqrt{3}) = 3^{-3}, \quad (1.3)$$

$$\sup_X f = f(1) = 3^{-1}. \quad (1.4)$$

Infatti $f = h \circ g$ con $h = 3^y$, $y \in \mathbb{R}$, $g = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che $h \nearrow$ (strettamente) in $\mathbb{R}$ e $g \nearrow$ in $(-\infty, 0]$ e $g \searrow$ in $[0, +\infty)$ (strettamente) dal Teorema di monotonia della funzione composta (vedere [B] §5.2) si ha $f \nearrow$ (strettamente) in $(-\infty, 0]$ e $f \searrow$ (strettamente) in $[0, +\infty)$. Dato che

$$|x^2 - 2| < 1 \iff \begin{cases} x^2 - 2 < 1 \\ x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} -x^2 + 2 < 1 \\ x^2 - 2 < 0, \end{cases}$$

si ha

$$X = \left\{ \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\} \cap \{x \leq -\sqrt{2}, x \geq \sqrt{2}\} \right\} \cup \left\{ \{x \in \mathbb{R} : x < -1, x > 1\} \cap \{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\} \right\} = \\ (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) = (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}).$$

Dato che f è pari è sufficiente considerare il problema su $(1, \sqrt{3})$. In particolare, dato che f è monotona strettamente decrescente si ha

$$f(\sqrt{3}) < f(x) < f(1), \quad \forall x \in (1, \sqrt{3}),$$

e $f(\sqrt{3})$ non è minimo e $f(1)$ non è massimo (vedere [B] §4.4 pg.7). Si verifica facilmente che $f(\sqrt{3}) = 3^{-3}$ è l'estremo inferiore di f e $f(1) = 3^{-1}$ è l'estremo superiore di f . Infatti

$$\forall \varepsilon \in (0, 3^{-1}) \quad f(x_\varepsilon) = 3^{-x_\varepsilon^2} > f(1) - \varepsilon = 3^{-1} - \varepsilon,$$

non appena

$$x_\varepsilon > \sqrt{-\log_3(3^{-1} - \varepsilon)}.$$

Si osserva in questo caso che se $\varepsilon \geq 3^{-1}$, $3^{-x^2} > 0 \geq 3^{-1} - \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Il ragionamento per l'estremo inferiore è analogo.

Si suggerisce di ricavare un grafico qualitativo di f come funzione composta tra $h(y) = \frac{1}{y}$ e $g(x) = 3^{x^2}$ e di dimostrare che $\max_{\mathbb{R}} f = f(0) = 1$ e $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$. ■

Esercizio

Determinare gli estremi (massimi e minimi se esistono) dell'insieme

$$A = \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{n^4}{n^4 + 1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

giustificando la risposta.

Soluzione

Scrivendo

$$\frac{n^4}{n^4 + 1} = 1 - \frac{1}{n^4 + 1},$$

si verifica facilmente che $g(n) = \frac{\pi}{2} \frac{n^4}{n^4 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$ è monotona strettamente crescente. In particolare

$$g(n) \geq g(1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se ne deduce che

$$\min_{\mathbb{N}} g = g(1) = \frac{\pi}{4}.$$

È chiaro che

$$g(n) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{n^4 + 1} \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e quindi $\frac{\pi}{2}$ è un maggiorante per g . Dimostriamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : g(n_\varepsilon) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

ovvero che $\frac{\pi}{2}$ è il minimo dei maggioranti. Infatti, si ha

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{n^4 + 1} \right) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \iff \frac{1}{n^4 + 1} < \frac{2}{\pi} \varepsilon \iff n^4 + 1 > \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Se ne deduce che $g(n_\varepsilon) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ non appena

$$n_\varepsilon \geq \left\lceil \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Concludiamo che

$$\sup_{\mathbb{N}} g = \frac{\pi}{2}.$$

Si ora

$$f(n) = \sin(g(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

È chiaro che $A = \text{Im}(f)$. Dato che $\text{Im}(g) \subset \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ e dato che la funzione $h(y) = \sin(y)$ è strettamente crescente in $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, per il Teorema di monotonia della funzione composta (vedere [B] §5.2) si ha che f è monotona strettamente crescente. In particolare

$$f(n) \geq f(1) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concludiamo che

$$\min_{\mathbb{N}} f = \min \text{Im}(f) = \min A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Osserviamo poi che

$$f(n) = \sin(g(n)) \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e quindi 1 è un maggiorante per f . Dimostriamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : f(n_\varepsilon) > 1 - \varepsilon,$$

ovvero che 1 è il minimo dei maggioranti. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \sin(g(n)) > 1 - \varepsilon &\iff g(n) > \arcsin(1 - \varepsilon) \iff \left(1 - \frac{1}{n^4 + 1}\right) < \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) \iff \\ \frac{1}{n^4 + 1} < 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) &\iff n^4 + 1 > \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Se ne deduce che $f(n_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ non appena

$$n_\varepsilon \geq \left\lceil \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{4}} \right\rceil.$$

Si osserva in questo caso che se $\varepsilon \geq 1$, $f(n) \geq \frac{\pi}{4} > 0 \geq 1 - \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Concludiamo che

$$\sup_{\mathbb{N}} f = \sup \text{Im}(f) = \sup A = 1.$$

■

Determinare gli estremi (massimi e minimi se esistono) dell'insieme

$$A = \left\{ \log_3 \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{n^4}{n^4 + 1} \right) \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

giustificando la risposta.

Soluzione

Poniamo

$$g(n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{n^4}{n^4 + 1} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(n) = \log_3(1 - g(n)), n \in \mathbb{N}.$$

Usando l' esercizio precedente, si verifica facilmente che $1 - g \searrow$ (strettamente) in $\mathbb{N}$ e che

$$\max_{\mathbb{N}}(1 - g) = 1 - g(1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sup_{\mathbb{N}} g = 1.$$

Se ne deduce che $1 - g(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : 1 - g(n_\varepsilon) < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Posto $h(y) = \log_3(y)$, $y \in (0, +\infty)$ si ha $h \nearrow$ (strettamente) in $(0, +\infty)$. Per il Teorema di monotonia della funzione composta (vedere [B] §5.2) si ha che f è monotona strettamente decrescente. In particolare

$$f(n) \leq f(1) = \log_3(1 - g(1)) = \log_3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concludiamo che

$$\max_{\mathbb{N}} f = f(1) = \max A = \log_3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Dimostriamo che

$$\inf_{\mathbb{N}} f = -\infty. \quad (1.6)$$

Si tratta di far vedere che

$$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{N} : f(n_M) < -M.$$

Si ha

$$f(n) < -M \iff \log_3(1 - g(n)) < -M \iff$$

$$1 - g(n) < 3^{-M}. \quad (1.7)$$

È possibile anche in questo caso utilizzare l' espressione esplicita di g per determinare, come negli esercizi precedenti, l' espressione esplicita di n_M .

Tuttavia osserviamo che per dimostrare la (1.6) è sufficiente far vedere che per ogni $M > 0$ ESISTE $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $f(n_M) < -M$. A tale scopo è sufficiente utilizzare la (1.5) e il fatto che la (1.7) è equivalente a $f(n) < -M$. Infatti, sia $M > 0$ fissato. Sia poi $\varepsilon_M = \frac{1}{2}3^{-M}$. È chiaro che $\varepsilon_M < 3^{-M}$. Dalla (1.5) concludiamo che, posto $n_M = n_{\varepsilon_M}$, si ha

$$1 - g(n_M) < \varepsilon_M < 3^{-M}.$$

Questa relazione implica che la (1.7) (e in particolare la $f(n) < -M$) è verificata con $n = n_M$. ■