

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §3.	1
2. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §4.	1

[B] Dispense a cura del Docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §3.

§3.2

ESERCIZI: Determinare il più piccolo intervallo che contiene gli insiemi:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}, A = \left\{ \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}, A = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, A = \left\{ \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soluzione.

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si è visto in [B] §2.3 che $\max A = 1$ e $\inf A = 0$. Quindi il più piccolo intervallo che contiene A è $I = (0, 1]$.

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Si è visto in [B] §2.3 che $\max A = \frac{1}{3}$ e $\min A = -\frac{1}{4}$. Quindi il più piccolo intervallo che contiene A è $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

$$A = \left\{ \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si è visto in [B] §2.3 che $\max A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\min A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi il più piccolo intervallo che contiene A è $I = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Abbiamo visto nelle soluzioni degli esercizi del §2.3 che $\sup A = 1$ e $\min A = 0$. Quindi il più piccolo intervallo che contiene A è $I = [0, 1)$.

$$A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Abbiamo visto nelle soluzioni degli esercizi del §2.3 che $A = 2\mathbb{N} \cup \{-\{2\mathbb{N} - 1\}\}$. Quindi A è sia superiormente che inferiormente illimitato e il più piccolo intervallo che contiene A è $I = (-\infty, +\infty)$.

$$A = \left\{ \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Abbiamo visto nelle soluzioni degli esercizi del §2.3 che $\max A = 1$ e $\min A = -1$. Quindi il più piccolo intervallo che contiene A è $I = [-1, +1]$. ■

2. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §4.

§4.2

ESERCIZI: Determinare il dominio di definizione di:

$$f(x) = x^2 - 2, f(x) = \frac{1}{2-x^2}, f(x) = \sqrt{2-x^2}, f(x) = \log_{10}(2-x^2), f(x) = \log_2[\log_{10}(2-x^2)],$$
$$f(x) = \sqrt{\log_2(2-x^2)}.$$

Soluzione.

$$f(x) = x^2 - 2. \text{ dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x^2}. \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

$$f(x) = \sqrt{2-x^2}. \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 \geq 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$f(x) = \log_{10}(2-x^2). \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 > 0\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$f(x) = \log_2[\log_{10}(2-x^2)]. \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \log_{10}(2-x^2) > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2-x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (2-x^2) > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2-x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2-x^2 > 1\} = (-1, 1).$$

$$f(x) = \sqrt{\log_2(2-x^2)}. \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(2-x^2) \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2-x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (2-x^2) \geq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2-x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2-x^2 \geq 1\} = [-1, 1].$$

ALTRI ESERCIZI SUL DOMINIO NATURALE: Determinare il dominio di definizione di:

$$f(x) = \frac{1}{\log_2(x)}, f(x) = \frac{1}{\tan(x)}, f(x) = \sqrt{\tan(x)}, f(x) = \log_{10}(\tan(x)).$$

Soluzione.

$f(x) = \frac{1}{\log_2(x)}$. Bisogna imporre che il denominatore non sia nullo, quindi $\log_2(x) \neq 0$, e che il $\log_2(x)$ sia ben definito (quindi $x > 0$). Concludiamo quindi che,

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(x) \neq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

$f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$. Bisogna imporre che il denominatore non sia nullo, quindi $\tan(x) \neq 0$ e che la tangente sia ben definita (quindi $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$). Concludiamo quindi che,

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \tan(x) \neq 0\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}\} = \{\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}\} = \mathbb{R} \setminus \{\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Per ottenere una rappresentazione equivalente più "semplice" del dominio in questione, si può osservare che il dominio di definizione è $\mathbb{R}$ meno tutti i multipli interi relativi dispari di $\frac{\pi}{2}$ e tutti i multipli interi relativi pari e dispari di π . Ma i multipli interi relativi pari e dispari di π altro non sono che tutti i multipli interi relativi pari di $\frac{\pi}{2}$, cosa che risulta evidente se, per un generico $k \in \mathbb{Z}$, si scrive

$$k\pi = k\pi \frac{2}{2} = 2k \frac{\pi}{2}.$$

Quindi il dominio dato è $\mathbb{R}$ meno tutti i multipli interi relativi pari e dispari di $\frac{\pi}{2}$. Ne consegue che

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : k\frac{\pi}{2} < x < (k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Osservazione

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono insiemi, si indica la loro unione con

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Con questa notazione si ha anche

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : k\frac{\pi}{2} < x < (k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.1)$$

$f(x) = \sqrt{\tan(x)}$. Bisogna imporre che l'argomento della radice sia non negativo, quindi $\tan(x) \geq 0$ e che la tangente sia ben definita (quindi $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$). Ragionando come sopra, concludiamo che, $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \tan(x) \geq 0\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}\} = \{x \in \mathbb{R} : 2k\frac{\pi}{2} \leq x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ e in particolare, utilizzando la notazione (2.1),

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2k\frac{\pi}{2} \leq x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

$f(x) = \log_{10}(\tan(x))$. Bisogna imporre che l'argomento del logaritmo sia positivo, quindi $\tan(x) > 0$ e che la tangente sia ben definita (quindi $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$). Quindi il risultato è simile a quello dell'esercizio precedente, con l'unica differenza che bisogna escludere i punti in cui $\tan(x) = 0$, ovvero

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2k\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

ESERCIZIO: Dire quale delle funzioni elementari definite negli ESEMPI di cui al §4.2 in [B], sono pari/dispari.

Soluzione.

Le funzioni x^{2k} , e $\frac{1}{x^{2k}}$ con $k \in \mathbb{N}$ e la funzione $\cos(x)$ sono pari.

Viceversa sono dispari le funzioni x^{2k+1} , e $\frac{1}{x^{2k+1}}$ con $k \in \mathbb{N}$, le radici di ordine dispari $\sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ e le funzioni $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$.

Osservazione

Le funzioni esponenziali non sono né pari né dispari.

Le funzioni radice di ordine pari e le logaritmiche non possono essere né pari né dispari perché sono definite in insiemi non simmetrici. Una classe di funzioni pari "analoghe" alle radici dispari si ottiene costruendo le funzioni composte (vedere [B] §5) tra le radici di ordine pari e la funzione modulo, $\sqrt[2k]{|x|}$, $k \in \mathbb{N}$. $\square$