SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 01-02-03

CONTENTS

1.	SOLUZIONI ESERCIZI DEL §1.	1
2.	SOLUZIONI ESERCIZI DEL §2.	2

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §1.

§1.3

ESERCIZIO: Esprimere in forma di elenco gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 4) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0\}, A \cap \mathbb{Z}, A \cap \mathbb{R}^+.$$

Soluzione.

Da quanto visto al §1.3, sappiamo che

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

D' altra parte $(x^2 - 4) = 0 \iff x = \pm 2$, e quindi

$$A = \{-2, 2\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Segue immediatamente che

$$A \cap \mathbb{R}^+ = \{2\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Inoltre, osserviamo che $\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Per verificare questo fatto, osserviamo che

$$\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{2}{5\pi}, -\frac{2}{3\pi}, -\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{5\pi}, \dots\right\}.$$

Dato che $\pi = 3.14\dots$, concludiamo che

$$\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\} \subset \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\},$$

e quindi $\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Concludiamo allora che $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, 2\}$. ■

Osservazione

Osserviamo che vale anche $\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Per dimostrare questo fatto, iniziamo con il ricordare che π è irrazionale. Supponiamo per assurdo che per qualche $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ sia razionale. Si avrebbe quindi

$$\exists m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{m}{n},$$

e quindi, in particolare,

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{1 + 2k} = \frac{m}{n}.$$

Si deduce dall' ultima identità che

$$\pi = \frac{(2k + 1)m}{2n},$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero concluderemmo che π è razionale. Questa contraddizione (π sarebbe razionale mentre noi sappiamo che non è razionale) mostra che la nostra ipotesi iniziale era errata. Quindi $\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. $\square$

2. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §2.

§2.3

ESERCIZIO: Determinare (quando esistono) sup/inf degli insiemi

$$A = \{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}, A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, A = \{\cos(n\frac{\pi}{2}) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Soluzione.

$$A = \{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Osserviamo che $A = \{0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \dots\}$. Si può verificare facilmente che $0 \in A$ e che $0 \leq 1 - \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$, quindi $\min A = 0$. Dato che $1 - \frac{1}{n^2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, l'estremo superiore deve essere minore o uguale a 1 (perché 1 è un maggiorante e l'estremo superiore è per definizione il minimo dei maggioranti). Dato che i numeri $1 - \frac{1}{n^2}$ assumono valori positivi "sempre più vicini a 1", è ragionevole supporre che l'estremo superiore di A sia $\mu = 1$. Verifichiamo allora che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > 1 - \varepsilon,$$

ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon. \quad (2.1)$$

È fondamentale tenere presente che la proprietà espressa nella (2.1) è molto forte perché si richiede che l'esistenza di $n \in \mathbb{N}$ tale che valga $1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon$, deve essere verificata PER OGNI $\varepsilon > 0$. Fissato quindi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, vogliamo dimostrare che $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon$.

D'altra parte $(1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon, n \in \mathbb{N}) \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Vediamo allora che effettivamente esiste un intero positivo n che verifica $1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon$. Infatti, per trovare un $n \in \mathbb{N}$ con questa proprietà, sarà sufficiente scegliere $n > \nu_\varepsilon$, con $\nu_\varepsilon = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$, dove $[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$ indica la parte intera di $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Concludiamo che $1 = \sup A$ che comunque non è massimo perché $1 \notin A$.

$$A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Siano $B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ e $C = \{-1, -3, -5, \dots\}$. È chiaro che $A = B \cup C = 2\mathbb{N} \cup \{-2\mathbb{N} - 1\}$ non ammette né estremo superiore (perché non ha maggioranti) né estremo inferiore (perché non ha minoranti).

$$A = \{\cos(n\frac{\pi}{2}) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si verifica facilmente che $A = \{-1, 0, 1\}$, e quindi $\max A = 1$ e $\min A = -1$. $\blacksquare$

Osservazione

Si è visto nell'esercizio di cui sopra che se $A = \{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ allora $\sup A = 1$, ovvero che 1 è un maggiorante per A , e che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon. \quad (2.2)$$

Lo scopo di questa osservazione è mostrare **ESPLICITAMENTE** che se $\mu \neq 1$, allora μ **NON PUÒ ESSERE** l'estremo superiore di A . Distinguiamo due casi: $\mu < 1$ e $\mu > 1$.

CASO $\mu < 1$.

Usando il fatto che in questo caso $\mu < 1$, e usando anche la (2.2), possiamo dimostrare che μ non può essere un maggiorante per A . È fondamentale tenere presente che se $\mu < 1$, allora μ non può essere un maggiorante perché nella (2.2) vale la condizione $\forall \varepsilon > 0$.

Infatti, fissato $\mu < 1$ arbitrariamente, si ha $1 - \mu > 0$. Quindi, dato che possiamo sostituire $\varepsilon = 1 - \mu$ nella (2.2) (cosa che, sottolineiamo, si può fare perché la (2.2) richiede che PER OGNI $\varepsilon > 0$ esista $n \in \mathbb{N}$

tale che $1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon$), si ottiene

$$\varepsilon = 1 - \mu > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon = 1 - (1 - \mu) = \mu.$$

Concludiamo che se $\mu < 1$, allora ESISTE almeno un elemento di A maggiore di μ , ovvero, μ non è un maggiorante di A . In particolare, dato che l'estremo superiore è il minimo dei maggioranti, allora μ non può essere l'estremo superiore di A .

CASO $\mu > 1$.

In questo caso possiamo dimostrare che se $\mu > 1$ (ovvero che se μ è un altro maggiorante di A diverso da 1), allora NON È VERO CHE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > \mu - \varepsilon,$$

ovvero che NON È VERO CHE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon. \quad (2.3)$$

È fondamentale tenere presente che se $\mu > 1$ la (2.3) è falsa a causa della condizione $\forall \varepsilon > 0$. In altri termini, se $\mu > 1$ sarà possibile trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon$ SOLO PER QUALCHE $\varepsilon > 0$ e non PER OGNI $\varepsilon > 0$.

Sia quindi μ un qualunque numero reale maggiore di 1, $\mu > 1$. Si ha

$$\left(1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon, n \in \mathbb{N}^+\right) \iff \left(\frac{1}{n^2} < \varepsilon - (\mu - 1), n \in \mathbb{N}^+\right).$$

Per ipotesi $\mu - 1 > 0$, ed è quindi chiaro che:

- (i) Se $\varepsilon > (\mu - 1)$ allora si può trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon$. Infatti, in questo caso si ha $\varepsilon - (\mu - 1) > 0$, e quindi

$$\left(1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right) \iff \left(\frac{1}{n^2} < \varepsilon - (\mu - 1), n \in \mathbb{N}\right) \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - (\mu - 1)}},$$

e sarà sufficiente scegliere $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - (\mu - 1)}}$.

- (ii) Se $\varepsilon \leq (\mu - 1)$ allora NON si può trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon$. Infatti, in questo caso si ha $\varepsilon - (\mu - 1) \leq 0$, e dato che

$$\left(1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon, n \in \mathbb{N}\right) \iff \left(\frac{1}{n^2} < \varepsilon - (\mu - 1), n \in \mathbb{N}\right)$$

per verificare la (2.3) anche in questo caso, dovremmo trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n^2} < \varepsilon - (\mu - 1)$. Tale n chiaramente NON PUÒ ESISTERE, dato che $\frac{1}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, mentre $\varepsilon - (\mu - 1) \leq 0$. Dunque se tale n esistesse, avremmo un numero reale POSITIVO ($\frac{1}{n^2}$) che risulterebbe MINORE di un altro numero reale ($\varepsilon - (\mu - 1)$) NEGATIVO O NULLO, fatto questo chiaramente impossibile.

Dunque se $\mu > 1$ ci sono SOLO ALCUNI VALORI di ε (infatti tutti quelli per cui vale $\varepsilon > \mu - 1$) tali che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon$. Per gli altri valori (infatti per ogni $0 < \varepsilon \leq \mu - 1$) NON ESISTE $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{n^2} > \mu - \varepsilon$. Concludiamo quindi che se $\mu > 1$ la (2.3) non vale. Segue allora dal Teorema di caratterizzazione operativa di sup / inf, (vedere [B] §2.3), che μ non può essere l'estremo superiore di A . $\square$