SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 38-39-40-41

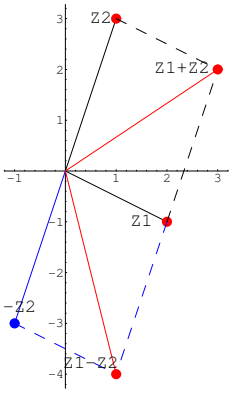
Contents

1. **SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE** 38. 1
2. **SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE** 39. 1
3. **SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI** 40 − 41. 3

[B] Dispense a cura del Docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 38.

ESERCIZIO. Disegnare $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 3i$ e $z_1 \pm z_2$.
Soluzione.



ESERCIZIO. Determinare la rappresentazione trigonometrica di $\pm i$.
Soluzione.
Dato che $|\pm i| = 1$ e $\arg(\pm i) = \pm\frac{\pi}{2}$, si ha

$$\pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}.$$

2. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 39.

ESERCIZIO CONSIGLIATO: Dimostrare la formula del rapporto tramite la rappresentazione trigonometrica.
Soluzione.
Dati $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_2 \neq 0$ e

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\left(\arg\left(z_1\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_1\right)\right)\right), \quad z_2 = |z_2|\left(\cos\left(\arg\left(z_2\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_2\right)\right)\right),$$

si tratta di dimostrare che

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right)\right)\right). \tag{2.1}$$

Dato che

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2}\overline{|z_2|\left(\cos\left(\arg\left(z_2\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_2\right)\right)\right)} =$$

$$\frac{|z_2|}{|z_2|^2}\overline{\left(\cos\left(\arg\left(z_2\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_2\right)\right)\right)} = \frac{1}{|z_2|}\left(\cos\left(\arg\left(z_2\right)\right) - i\sin\left(\arg\left(z_2\right)\right)\right),$$

si ha

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\arg\left(z_1\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_1\right)\right)\right)\left(\cos\left(\arg\left(z_2\right)\right) - i\sin\left(\arg\left(z_2\right)\right)\right) =$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\arg\left(z_1\right)\right) + i\sin\left(\arg\left(z_1\right)\right)\right)\left(\cos\left(-\arg\left(z_2\right)\right) + i\sin\left(-\arg\left(z_2\right)\right)\right),$$

e la (2.1) segue dalla formula del prodotto. ■

ESERCIZIO. Calcolare e disegnare $\frac{z_1}{z_2}$, con $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Soluzione.
Si ha

$$|z_1| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad \arg\left(z_1\right) = \arccos\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

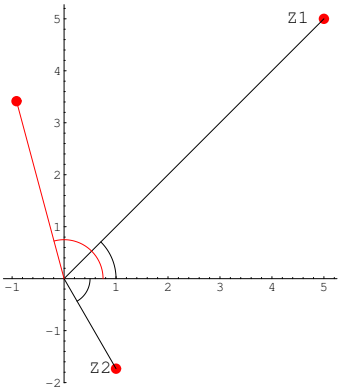
$$|z_2| = \sqrt{4} = 2, \quad \arg\left(z_2\right) = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Dato che

$$\arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{7}{12}\pi,$$

si ha

$$\frac{z_1}{z_2} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\frac{7}{12}\pi} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right).$$



ESERCIZIO: Calcolare $(1 - i\sqrt{3})^5$.

Soluzione.
Sia $z = 1 - i\sqrt{3}$. Si ha

$$|z| = \sqrt{4} = 2, \quad \arg\left(z\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Dalla formula di de Moivre, si ha

$$z^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(-5\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-5\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$2^5\left(\cos\left(-5\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + i\sin\left(-5\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\right) =$$

$$2^5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^5\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16(1+i\sqrt{3}).$$

3. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI $40-41$.

ESERCIZIO. Determinare la rappresentazione trigonometrica e quindi disegnare le radici quarte e quinte di $z=1$ e le radici quadrate di -1.

Soluzione.
Dato che $|1|=1$ e $\arg(1)=0$, si ha $1=e^0$, e quindi

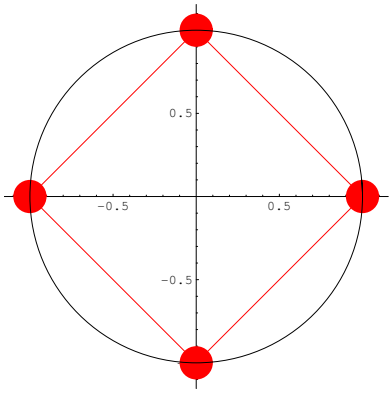
$$z^4=1 \iff z=\xi_k=e^{i\frac{0}{4}+i2\pi\frac{k}{4}}=e^{i\pi\frac{k}{2}}, \quad k=0,1,2,3.$$

Analogamente si ha

$$z^5=1 \iff z=\xi_k=e^{i2\pi\frac{k}{5}}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

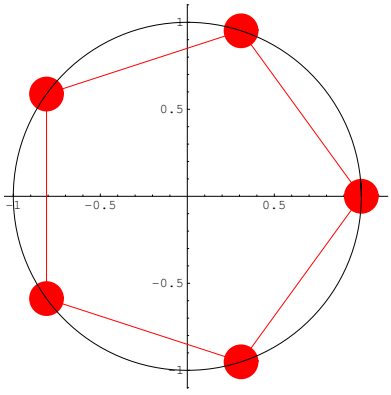
Quindi in particolare

$$z^4=1 \iff z=\xi_k,\ k=0,1,2,3, \quad \text{con} \quad \xi_k=e^{i\pi\frac{k}{2}},$$



e

$$z^5=1 \iff z=\xi_k,\ k=0,1,2,3,4, \quad \text{con} \quad \xi_k=e^{i\pi\frac{2k}{5}}.$$



Inoltre, dato che $|-1|=1$ e $\arg(-1)=\pi$, si ha $-1=e^{i\pi}$ e quindi

$$z^2=-1 \iff z=z_k=e^{i\frac{\pi}{2}+2i\pi\frac{k}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\pi k}, \quad k=0,1.$$

Quindi

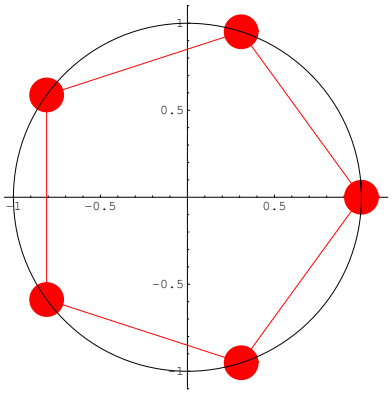
$$z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}=i, \quad z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}(-1)=-i.$$

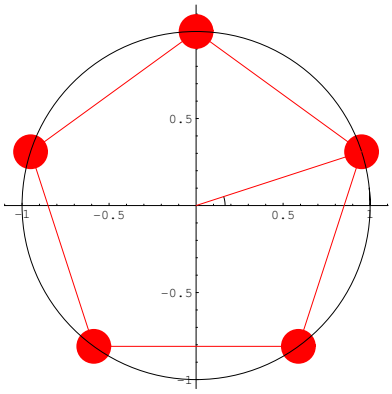
ESERCIZIO. Determinare la rappresentazione trigonometrica e quindi disegnare le radici n-esime di $z = i$ e di $-3 + i\sqrt{3}$.

Soluzione.
Dato che $|i| = 1$ e $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$z^n = i \iff z = z_k,\ k = 0, 1, \cdots, n, \quad \text{con} \quad z_k = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\pi\frac{2k}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \xi_k,$$

dove le ξ_k, $k = 0, 1, \cdots, n$ sono le radici n-esime dell' unità , $w^n = 1 \iff w = \xi_k$, $k = 0, 1, \cdots, n$. Dato che, per n fissato, le ξ_k sono i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza unitaria con un vertice in $z = 1$, le radici n-esime di $\imath$ sono, a n fissato, i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza unitaria con un vertice in $z = e^{i\frac{\pi}{2n}}$, ovvero del poligono di vertici ξ_k ruotato di $\frac{\pi}{2n}$.





Dato che $|-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e

$$\arg\left(-3 + i\sqrt{3}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6},$$

si ha $-3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$, e quindi

$$z^n = -3 + i\sqrt{3} \iff z = z_k,\ k = 0, 1, \cdots, n, \quad \text{con} \quad z_k = \left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{5\pi}{6n}} e^{i\pi\frac{2k}{n}} = \sqrt[n]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{5\pi}{6n}} \xi_k.$$

Come sopra, concludiamo che le radici n-esime di $-3+i\sqrt{3}$ sono, a n fissato, i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{2\sqrt{3}}$ con un vertice in $z = e^{i\frac{5\pi}{6n}}$, ovvero del poligono di vertici $\sqrt[n]{2\sqrt{3}}\, \xi_k$ ruotato di $e^{i\frac{5\pi}{6n}}$. ■

ESERCIZIO. Risolvere $-\frac{1}{4}z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})$ e disegnarne le soluzioni.

Soluzione.
Si ha

$$z_\pm = \frac{1 + i\sqrt{3} \pm w}{-\frac{1}{2}},$$

dove w è una delle soluzioni di $w^2 = \Delta$, dove $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3})$. Dato che

$$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3}) = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 1 - i\sqrt{3} = -1 + i\sqrt{3},$$

si ha $|\Delta| = 2$, $\arg(\Delta) = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Quindi possiamo scegliere $w = \sqrt{2}\, e^{ih\frac{2\pi}{6}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$ e concludere che

$$z_\pm = -2\left(1 + i\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})\right),$$

e in particolare che

$$z_+ = -\left(2+\sqrt{2}+ih\sqrt{3}(2+\sqrt{2})\right) = -(2+\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})$$
$$z_- = -\left(2-\sqrt{2}+i\sqrt{3}(2-\sqrt{2})\right) = -(2-\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})$$

■