

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 36-37

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 36 – 37.

1

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 36 – 37.

ESERCIZI: Calcolare

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Soluzione.

Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t} - 2) = +\infty, \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{s \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{s}) = 2. \end{aligned}$$

■

ESERCIZIO: Dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx,$$

è divergente.

Soluzione.

Si ha

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \log(x) \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} -\log(s) = +\infty.$$

■

ESERCIZIO: Dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx,$$

è divergente se $\alpha \leq 1$, convergente se $\alpha > 1$ e viceversa che

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{|x|^\alpha} dx,$$

è divergente se $\alpha \geq 1$, convergente se $\alpha < 1$.

Soluzione.

Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-1} \frac{1}{(-x)^\alpha} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_{-s}^1 \frac{1}{(y)^\alpha} (-dy) = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_1^{-s} \frac{1}{y^\alpha} dy = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{y^\alpha} dy.\end{aligned}$$

L'ultimo limite è stato svolto a lezione e risulta convergente se $\alpha > 1$, divergente se $\alpha \leq 1$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{|x|^\alpha} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\frac{1}{t}} \frac{1}{|y^{-1}|^\alpha} \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-1} \frac{|y|^\alpha}{y^2} dy = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-1} \frac{1}{|y|^{2-\alpha}} dy,\end{aligned}$$

e l'ultimo limite è per l'esercizio precedente convergente se $2 - \alpha > 1$, ovvero se $\alpha < 1$ e divergente se $2 - \alpha \leq 1$, ovvero se $\alpha \geq 1$. ■

ESERCIZIO: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{x_0-1}^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx.$$

Soluzione.

Per definizione di integrale improprio si ha

$$\begin{aligned}\int_{x_0-1}^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx &= \lim_{t \rightarrow x_0^-} \int_{x_0-1}^t \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx + \lim_{s \rightarrow x_0^+} \int_s^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow x_0^-} \int_{-1}^{t-x_0} \frac{1}{|y|^\alpha} dy + \lim_{s \rightarrow x_0^+} \int_{s-x_0}^1 \frac{1}{|y|^\alpha} dx = \lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int_{-1}^\tau \frac{1}{|y|^\alpha} dy + \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_\sigma^1 \frac{1}{|y|^\alpha} dx.\end{aligned}$$

Per l' esercizio precedente i limiti sono entrambe convergenti se $\alpha < 1$ e entrambe divergenti se $\alpha \geq 1$. ■

ESERCIZI: Discutere, la convergenza degli integrali impropri

$$\int_1^4 \frac{1}{|x-2|^{\frac{1}{3}}} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx,$$

e calcolare il secondo.

Soluzione.

Dato che $\frac{1}{3} < 1$, procedendo come nell' esercizio precedente, si verifica facilmente che il primo integrale è convergente.

Per definizione di integrale improprio si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{(1+x^2)^2} + \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{(1+x^2)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right) \Big|_0^t + \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right) \Big|_s^0 = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t \right) + \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(-\frac{s}{2(1+s^2)} - \frac{1}{2} \arctan s \right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

ESERCIZI: Discutere, la convergenza degli integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{|x|}} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{2 + \sin(x)}{|x|^4} dx.$$

Soluzione.

Si ha

$$\frac{2 + \sin(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{2 - 1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in [1, +\infty),$$

e quindi, per il criterio del confronto, l' integrale $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin(x)}{\sqrt{x}} dx$, è divergente perché l' integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ è divergente.

Si ha

$$\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{|x|}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}, \quad \forall x \in [-1, 0],$$

e quindi, per il criterio del confronto, l' integrale $\int_{-1}^0 \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{|x|}} dx$, è convergente perché l' integrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ è convergente.

Si ha

$$\frac{2 + \sin(x)}{|x|^4} \geq \frac{2 - 1}{|x|^4} = \frac{1}{|x|^4}, \quad \forall x \in [-1, 0],$$

e quindi, per il criterio del confronto, l' integrale $\int_{-1}^0 \frac{2 + \sin(x)}{|x|^4} dx$, è divergente perché l' integrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{|x|^4} dx$ è divergente. ■

ESERCIZIO. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere, la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1 - \cos(x))^{\frac{1}{3}}}{|e^x - 1 - x|^\alpha} dx.$$

Soluzione.

La funzione integranda è positiva in $[0, 1]$. Dato che $e^x - 1 - x = 0 \iff x = 0$, la funzione integranda è continua (e dunque Riemann integrabile) in $[0, 1]$ se $\alpha \leq 0$. Fissato quindi $\alpha > 0$ si ha

$$\frac{(1 - \cos(x))^{\frac{1}{3}}}{|e^x - 1 - x|^\alpha} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}(1 + o(1))\right)^{\frac{1}{3}}}{\left|\frac{x^2}{2}(1 + o(1))\right|^\alpha} = \frac{2^{-\frac{1}{3} + \alpha}}{x^{2\alpha - \frac{2}{3}}} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico l' integrale improprio è convergente se $2\alpha - \frac{2}{3} < 1$, ovvero se $\alpha < \frac{5}{6}$ e divergente se $2\alpha - \frac{2}{3} \geq 1$, ovvero se $\alpha \geq \frac{5}{6}$.

ESERCIZIO. Discutere la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^2 |\log|x||} dx.$$

Soluzione.

La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|x|^2 |\log|x||}}{\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{|x|^2 |\log|x||} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|} |\log|x||} = +\infty,$$

si ha

$$\exists \delta \in (0, 1) : \frac{1}{|x|^2 |\log |x||} > \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}, \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Dato che l'integrale $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}} dx$ è divergente, per il teorema del confronto anche l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^2 |\log |x||} dx$, è divergente.

Si sarebbe anche potuto osservare che

$$\frac{1}{|x|^2 |\log |x||} = \frac{1}{|(x-1)|} (1 + o(1)), x \rightarrow 1,$$

e dato che l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{|x-1|} dx$ è divergente, anche l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^2 |\log |x||} dx$, risulta essere divergente.

Equivalentemente, si sarebbe potuto osservare che

$$\frac{1}{|x|^2 |\log |x||} = \frac{1}{|-(x+1)|} (1 + o(1)), x \rightarrow -1,$$

e dato che l'integrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|x+1|} dx$ è divergente, anche l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^2 |\log |x||} dx$, risulta essere divergente. ■

ESERCIZIO. Cosa si può concludere sulla convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{(e^{\frac{1}{|x|(\log |x|)^4}} - 1)^2 |x|^4 (\log |x|)^{16}}{|x|(\log |x|)^4 (1 + x^2 (\log |x|)^8)} dx, \quad (1.1)$$

utilizzando il criterio del confronto asintotico con le funzioni $g(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$?

Soluzione.

La soluzione verrà discussa a ricevimento con gli studenti interessati. Per quanto riguarda la convergenza/divergenza osserviamo che la funzione integranda è positiva e ben definita in $(-\infty, -2]$. Si ha

$$\frac{(e^{\frac{1}{|x|(\log |x|)^4}} - 1)^2 |x|^4 (\log |x|)^{16}}{|x|(\log |x|)^4 (1 + x^2 (\log |x|)^8)} = \frac{\frac{1}{|x|^2 (\log |x|)^8} (1 + o(1)) |x|^4 (\log |x|)^{16}}{|x|(\log |x|)^4 x^2 (\log |x|)^8 (1 + o(1))} = \frac{|x|^2 (\log |x|)^8 (1 + o(1))}{|x|^3 (\log |x|)^{12}} = \frac{1 + o(1)}{|x|(\log |x|)^4}.$$

Dato che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{|x|(\log |x|)^4} dx$$

converge (verificare usando la definizione di integrale improprio e la sostituzione $y = \log |x|$) anche l'integrale (1.1) converge. ■

ESERCIZI CONSIGLIATI: Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\int_{-2}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx, \quad \int_{-1}^1 x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4} dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan(e^{x^2}) \log(1 + |x| \sin(|x|)^2)}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \right) dx.$$

Soluzione.

$$\int_{-2}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2+\alpha} e^{-x} = 0,$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo per esempio $\alpha = 2$, si conclude che l'integrale converge.

In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell'osservare che

$$\exists M > 1 : x^2 e^{-x} < \frac{1}{x^2}, \forall x \in [M, +\infty).$$

La funzione integranda è positiva e definita in $[-2, +\infty)$. Dato che l'integrale $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge, per il teorema del confronto anche l'integrale $\int_{-2}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ converge.

$$\int_{-1}^1 x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} dx.$$

La funzione integranda è positiva e non limitata in ogni intorno di $x = 0$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{4+\alpha} e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = +\infty,$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo per esempio $\alpha = 2$, si conclude che l'integrale diverge.

In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell'osservare che

$$\exists \delta \in (0, 1) : x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} > \frac{1}{x^2}, \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Dato che l'integrale $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x^2}$ diverge, per il teorema del confronto anche l'integrale $\int_{-1}^1 x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} dx$ diverge.

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4} dx.$$

La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4} = 0,$$

la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 0$ ed è quindi Riemann integrabile in ogni intorno limitato di $x = 0$. In particolare l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4} dx$, converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan(e^{x^2}) \log(1 + |x| \sin(|x|)^2)}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \right) dx. \quad (1.2)$$

La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan(e^{x^2}) \log(1 + |x| \sin(|x|)^2)}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \leq \frac{\pi}{2} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{|\log(1 + |x| \sin(|x|)^2)|}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \leq$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{4}{\pi} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{|\log(1+|x|) \sin(|x|)|^2}{\sqrt{|x|}} \leq 2 \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{|\log(1+|x|)|}{\sqrt{|x|}}, \forall |x| > 1.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}}}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) (\log(|x|))(1+o(1))|x|^{\alpha-\frac{1}{2}} = 0,$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo per esempio $\alpha = 2$, si conclude che gli integrali $\int_{-\infty}^{-M} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}} dx$, e $\int_M^{+\infty} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}} dx$, convergono. Usando il teorema del confronto convergono anche gli integrali

$$\int_{-\infty}^{-M} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan(e^{x^2}) \log(1+|x|) \sin(|x|)^2}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \right) dx,$$

e

$$\int_M^{+\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan(e^{x^2}) \log(1+|x|) \sin(|x|)^2}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \right) dx.$$

In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell'osservare che

$$\exists M > 1 : \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}} < \frac{1}{|x|^2}, \forall |x| > M.$$

Dato che gli integrali $\int_{-\infty}^{-M} \frac{1}{|x|^2} dx$ e $\int_M^{+\infty} \frac{1}{|x|^2} dx$ convergono, per il teorema del confronto anche gli integrali $\int_{-\infty}^{-M} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}} dx$, e $\int_M^{+\infty} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}} \right) \frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}} dx$, convergono.

Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan(e^{x^2}) \log(1+|x|) \sin(|x|)^2}{\sqrt{|x|} |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} = \frac{\frac{\pi}{4} |x|^3 (1+o(1))}{\sqrt{|x|} |x^{\frac{1}{3}} (1+o(1))|} = 0.$$

Se ne deduce che la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 0$ ed è quindi Riemann integrabile in ogni intorno limitato di $x = 0$.

Concludiamo quindi che l'integrale (1.2) è convergente. ■

ESERCIZIO CONSIGLIATO: Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{-x^2}}{|\log|x| \arctan(x^2-1)|^\alpha} \cdot dx. \quad (1.3)$$

Soluzione.

La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Sia

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{|\log|x| \arctan(x^2-1)|^\alpha}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x^2}}{|\log|x| \arctan(x^2-1)|^\alpha} &= \frac{e^{-1}(1+o(1))}{|(x-1)2(x-1)(1+o(1))|^\alpha} = \frac{1+o(1)}{2|(x-1)|^{2\alpha}}, \quad x \rightarrow 1, \\ \frac{e^{-x^2}}{|\log|x| \arctan(x^2-1)|^\alpha} &= \frac{e^{-1}(1+o(1))}{|-(x+1)2(x+1)(1+o(1))|^\alpha} = \frac{1+o(1)}{2|(x+1)|^{2\alpha}}, \quad x \rightarrow -1, \\ \frac{e^{-x^2}}{|\log|x| \arctan(x^2-1)|^\alpha} &= \frac{1+o(1)}{|\log|x| \frac{\pi}{4}(1+o(1))|^\alpha} = \frac{4^\alpha + o(1)}{\pi^\alpha |\log|x||^\alpha}, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Concludiamo che gli integrali impropri $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$ e $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx$ convergono se $2\alpha < 1$, ovvero se $\alpha < \frac{1}{2}$.

Inoltre, dato che per ogni $\alpha < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|\log |x||^{\alpha}} = 0,$$

l'integrale $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx$ converge per ogni $\alpha < 0$.

In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell'osservare che

$$\exists \delta \in (0, 1) : f(x) < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Per il Teorema del confronto l'integrale $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx$ converge per ogni $\alpha < 0$.

Per $\alpha \geq 0$ $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ e la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 0$ ed è quindi Riemann integrabile in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|^2 e^{-x^2}}{|\log |x| \arctan(x^2 - 1)|^{\alpha}} = 0,$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Concludiamo che gli integrali impropri $\int_M^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^{-M} f(x) dx$ convergono per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se ne deduce che l'integrale improprio (1.3) converge per $\alpha < \frac{1}{2}$. ■

ESERCIZIO.[FACOLTATIVO] Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin(x-3)|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}} dx.$$

Soluzione.

La funzione integranda è definita in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ e positiva. Si ha

$$\frac{|\sin(x-3)|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}} = \frac{|(x-3)(1+o(1))|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}} = |x-3|^{\frac{1}{3}}(1+o(1)), \quad x \rightarrow 3.$$

se ne deduce che la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 3$ e quindi è una funzione Riemann integrabile in $[2, t]$, per ogni $t > 0$. D'altra parte, posto $x - 3 = y \in [0, +\infty)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e per ogni $t \geq n\pi$, si ha

$$\begin{aligned} \int_2^t \frac{|\sin(x-3)|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}} dx &= \int_{-1}^{t-3} \frac{|\sin(y)|}{|y|^{\frac{2}{3}}} dy \geq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(y)|}{|y|^{\frac{2}{3}}} dy = \\ \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(y)|}{y^{\frac{2}{3}}} dy &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y^{\frac{2}{3}}} dy \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{((k+1)\pi)^{\frac{2}{3}}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(y)| dy = \\ &= \frac{2}{\pi^{\frac{2}{3}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\frac{2}{3}}} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

dato che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$ è divergente. Questo fatto si deduce immediatamente dal seguente risultato

visto a lezione: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$ converge se e solo se converge $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$.

Se ne deduce che l'integrale improprio è divergente. ■