

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 31-32-33-34-35

CONTENTS

1.	SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 31 – 33.	1
2.	SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 34.	8
3.	SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 35.	15

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 31 – 33.

Ricordiamo le seguenti formule di integrazione:

$$\int (f(x))^\alpha D(f(x)) dx = \frac{1}{\alpha+1} (f(x))^{\alpha+1} + c, \quad \forall \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{D(f(x))}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c,$$

$$\int e^{f(x)} D(f(x)) dx = e^{f(x)} + c,$$

$$\int \sin(f(x)) D(f(x)) dx = -\cos(f(x)) + c,$$

$$\int \cos(f(x)) D(f(x)) dx = \sin(f(x)) + c,$$

$$\int \frac{1}{1+f^2(x)} D(f(x)) dx = \arctan(f(x)) + c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} D(f(x)) dx = \arcsin(f(x)) + c.$$

ESERCIZI: Utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{e^{x^2} 2x}{1+e^{x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{x \log(x)} dx, \quad \int \tan(x) dx, \quad \int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\int \sin(4e^x + 1) e^x dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1+\sqrt{x}} dx, \quad \int \sin^3(x) dx.$$

Soluzione.

$$\int \frac{e^{x^2} 2x}{1+e^{x^2}} dx.$$

Operando la sostituzione $e^{x^2} = t$, si ha $D(e^{x^2})dx = dt$, ovvero $e^{x^2}(2x)dx = dt$ e in particolare

$$\int \frac{e^{x^2} 2x}{1+e^{x^2}} dx = \int \frac{1}{1+t} dt.$$

Operando ora la sostituzione $1 + t = s$, si ha $D(1 + t)dt = ds$, ovvero $dt = ds$ e in particolare

$$\int \frac{1}{1+t} dt = \int \frac{1}{s} ds = \log |s| + c = \log |1+t| + c = \log |1+e^{x^2}| + c = \log (1+e^{x^2}) + c.$$

Si sarebbe potuto scrivere, in modo equivalente,

$$\int \frac{e^{x^2} 2x}{1+e^{x^2}} dx = \int \frac{D(e^{x^2})}{1+e^{x^2}} dx = \int \frac{D(1+e^{x^2})}{1+e^{x^2}} dx = \log |1+e^{x^2}| + c.$$

$$\int \frac{1}{x \log(x)} dx.$$

Operando la sostituzione $\log x = t$, si ha $D(\log x)dx = dt$, ovvero $\frac{1}{x}dx = dt$ e in particolare

$$\int \frac{1}{x \log(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + c = \log (|\log x|) + c.$$

Si sarebbe potuto scrivere, in modo equivalente,

$$\int \frac{1}{x \log(x)} dx = \int \frac{D(\log x)}{\log(x)} dx = \log (|\log x|) + c.$$

$$\int \tan(x) dx.$$

Si ha

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{D(-\cos(x))}{\cos(x)} dx = -\log (|\cos(x)|) + c.$$

$$\int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx.$$

Osserviamo che

$$\int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx = \int \tan\left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx.$$

Operando la sostituzione $\frac{1}{x} = t$, si ha $D\left(\frac{1}{x}\right)dx = dt$, ovvero $-\frac{1}{x^2}dx = dt$, ovvero $\frac{1}{x^2}dx = -dt$ e in particolare

$$\begin{aligned} \int \tan\left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx &= -\int \tan(1+t) dt = -\int \tan(1+t) D(1+t) dt = \\ &= -\log (|\cos(1+t)|) + c = \log \left(\left| \cos\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right| \right) + c. \end{aligned}$$

$$\int \sin(4e^x + 1)e^x dx.$$

Operando la sostituzione $e^x = t$, si ha $D(e^x)dx = dt$, ovvero $e^x dx = dt$ e in particolare

$$\begin{aligned} \int \sin(4e^x + 1)e^x dx &= \int \sin(4t + 1) dt = \frac{1}{4} \int \sin(4t + 1) D(4t + 1) dt = \\ &= -\frac{1}{4} \cos(4t + 1) + c = -\frac{1}{4} \cos(4e^x + 1) + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx.$$

Operando la sostituzione $\sqrt{x} = t$, si ha $D(\sqrt{x})dx = dt$, ovvero $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$, ovvero $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$ e in particolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx = \int \sqrt{1+t} 2 dt = 2 \int (1+t)^{\frac{1}{2}} D(1+t) dt = \frac{4}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$\int \sin^3(x) dx.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) dx &= \int \sin^2(x)(\sin(x)) dx = \int (1 - \cos^2(x))(\sin(x)) dx = \int (1 - \cos^2(x))(\sin(x)) dx = \\ &= \int (1 - \cos^2(x))D(-\cos(x)) dx = - \int (1 - \cos^2(x))D(\cos(x)) dx = \\ &= - \int (1 - t^2) dt = -t + \frac{1}{3}t^3 + c = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + c. \end{aligned}$$

■

ESERCIZIO. Fissato $n \in \mathbb{N}$, utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin(x))^{2n+1} dx, \quad \int (\cos(x))^{2n+1} dx.$$

Soluzione.

$$\int (\sin(x))^{2n+1} dx.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int (\sin(x))^{2n+1} dx &= \int \sin^{2n}(x)(\sin(x)) dx = \int (1 - \cos^2(x))^n(\sin(x)) dx = \int (1 - \cos^2(x))^n D(-\cos(x)) dx = \\ &= - \int (1 - t^2)^n dt = - \int \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int t^{2k} dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} t^{2k+1} + c = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} (\cos(x))^{2k+1} + c. \end{aligned}$$

$$\int (\cos(x))^{2n+1} dx.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int (\cos(x))^{2n+1} dx &= \int \cos^{2n}(x)(\cos(x)) dx = \int (1 - \sin^2(x))^n(\cos(x)) dx = \int (1 - \sin^2(x))^n D(\sin(x)) dx = \\ &= \int (1 - t^2)^n dt = \int \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int t^{2k} dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} t^{2k+1} + c = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{2k+1} (\sin(x))^{2k+1} + c. \end{aligned}$$



ESERCIZI: Utilizzando la tecnica di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int \log(x) dx, \quad \int \arctan(x) dx, \quad \int x^2 \sin x dx, \quad \int x(\log x)^2 dx.$$

Soluzione.

$$\int x^2 e^x dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 D(e^x) dx = x^2 e^x - \int D(x^2) e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \int x D(e^x) dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int D(x) e^x dx \right) = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c. \end{aligned}$$

$$\int \log(x) dx.$$

Si ha

$$\int \log(x) dx = \int \log(x) D(x) dx = x \log(x) - \int D(\log(x)) x dx = x \log(x) - \int 1 dx = x \log(x) - x + c.$$

$$\int \arctan(x) dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int \arctan(x) D(x) dx = x \arctan(x) - \int D(\arctan(x)) x dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{D(1+x^2)}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c. \end{aligned}$$

$$\int x^2 \sin x dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= \int x^2 D(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + \int D(x^2) \cos x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x D(\sin x) dx = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int D(x) \sin x dx \right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c. \end{aligned}$$

$$\int x(\log x)^2 dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int x(\log x)^2 dx &= \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) (\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \frac{x^2}{2} D((\log x)^2) dx = \\ &= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{1}{2} \int x^2 2(\log x) \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x \log x dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \log x dx = \\ &= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x^2}{2} D(\log x) dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + c. \end{aligned}$$

Si suggerisce di calcolare per esercizio l' integrale $\int x(\log x)^2 dx$ operando la sostituzione $\log x = t$ e poi integrando per parti. ■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \log\left(\frac{x+b}{a}\right) dx, \quad \int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) dx.$$

Soluzione.

Dato che

$$\int \log(t) dt = t \log t - t + c,$$

per ogni $a \neq 0$ si ha

$$\int \log\left(\frac{x+b}{a}\right) dx = a \int \log\left(\frac{x+b}{a}\right) D\left(\frac{x+b}{a}\right) dx = (x+b) \log\left(\frac{x+b}{a}\right) - (x+b) + c.$$

Dato che

$$\int \arctan(t) dt = t \arctan t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) + c,$$

per ogni $a \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) dx &= a \int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) D\left(\frac{x+b}{a}\right) dx = \\ &= (x+b) \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) - \frac{a}{2} \log\left(1 + \left(\frac{x+b}{a}\right)^2\right) + c. \end{aligned}$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}} dx, \quad \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx, \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}} dx, \quad \int \sqrt[5]{a+bx^3} x^2 dx.$$

Soluzione.

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}} dx.$$

Operando la sostituzione $x^6 = t$ si ha $6x^5 dx = dt$, ovvero $x^5 dx = \frac{1}{6} dt$ e in particolare

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}} dx &= \int \frac{1}{6\sqrt{2+7t}} dt = \frac{1}{6} \int \frac{1}{7} \frac{D(2+7t)}{\sqrt{2+7t}} dt = \\ &= \frac{1}{42} \frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)} (2+7t)^{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{21} \sqrt{2+7x^6} + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx.$$

Operando la sostituzione $x^2 = t$ si ha $2x dx = dt$, ovvero $x^2 dx = \frac{1}{2} dt$ e in particolare

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx &= \int \frac{1}{2(1+4t)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4} \frac{D(1+4t)}{(1+4t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{(-2+1)} (1+4t)^{-2+1} + c = -\frac{1}{8(1+4x^2)} + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}} dx,$$

Operando la sostituzione $x^3 = t$ si ha $3x^2 dx = dt$, ovvero $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ e in particolare

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{2-2t^2}} dt = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \arcsin(t) + c = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arcsin(x^3) + c. \end{aligned}$$

$$\int \sqrt[5]{a+bx^3} x^2 dx.$$

Operando la sostituzione $x^3 = t$ si ha $3x^2 dx = dt$, ovvero $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ e in particolare, per ogni $b \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int \sqrt[5]{a+bx^3} x^2 dx &= \int \frac{1}{3} \sqrt[5]{a+bt} dt = \frac{1}{3b} \int \sqrt[5]{a+bt} D(a+bt) dt = \\ &= \frac{5}{18b} (a+bt)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{18b} (a+bx^3)^{\frac{6}{5}} + c. \end{aligned}$$

■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\begin{aligned} &\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x} \right) e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}} dx, \quad \int \frac{\log(x)}{x} \frac{\log^2(x)-4}{2+\log(x)} dx, \\ &\int \left(\arctan \left(\sqrt{2-\frac{1}{x}} \right) \right) \frac{1}{x^2} dx, \quad \int \frac{\arctan^3(e^x+4) + \arctan(e^x+4)}{1+(e^x+4)^2} e^x dx. \end{aligned}$$

Soluzione.

$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x} \right) e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}} dx.$$

Operando la sostituzione $\sqrt{2} + x = t$ si ha

$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2} + x} \right) e^{\sqrt{\sqrt{2} + x}} dx = \int \sqrt{t} e^{\sqrt{t}} dt.$$

Operando la sostituzione $t = y^2$, $y > 0$ si ha $dt = 2y dy$, $\sqrt{t} = y$ e in particolare

$$\int \sqrt{t} e^{\sqrt{t}} dt = \int y e^y 2y dy = 2 \int y^2 e^y.$$

Dato che (vedere sopra)

$$\int y^2 e^y = y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y + c,$$

si ha

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{\sqrt{2} + x} \right) e^{\sqrt{\sqrt{2} + x}} dx &= 2 \int y^2 e^y = 2y^2 e^y - 4y e^y + 4e^y + c = \\ 2te^{\sqrt{t}} - 4\sqrt{t} e^{\sqrt{t}} + 4e^{\sqrt{t}} + c &= 2(\sqrt{2} + x)e^{\sqrt{\sqrt{2} + x}} - 4 \left(\sqrt{\sqrt{2} + x} \right) e^{\sqrt{\sqrt{2} + x}} + 4e^{\sqrt{\sqrt{2} + x}} + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\log(x)}{x} \frac{\log^2(x) - 4}{2 + \log(x)} dx.$$

Operando la sostituzione $\log x = t$ si ha

$$\int \frac{\log(x)}{x} \frac{\log^2(x) - 4}{2 + \log(x)} dx = \int t \frac{t^2 - 4}{2 + t} dt = \int t(t - 2) dt = \frac{t^3}{3} - t^2 + c = \frac{(\log x)^3}{3} - (\log x)^2 + c.$$

$$\int \left(\arctan \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x}} \right) \right) \frac{1}{x^2} dx.$$

Operiamo la sostituzione $2 - \frac{1}{x} = t$, e successivamente $\sqrt{t} = y$ osservando che se $\sqrt{t} = y$ allora $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = dy$ ovvero $dt = 2y dy$.

$$\begin{aligned} \int \left(\arctan \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x}} \right) \right) \frac{1}{x^2} dx &= \int \left(\arctan(\sqrt{t}) \right) dt = \int (\arctan(y)) 2y dy = \\ \int (\arctan(y)) D(y^2) dy &= y^2 \arctan(y) - \int \frac{y^2}{1 + y^2} dy = y^2 \arctan(y) - \int \frac{1 + y^2 - 1}{1 + y^2} dy = \\ y^2 \arctan(y) - y + \int \frac{1}{1 + y^2} dy &= y^2 \arctan(y) - y + \arctan(y) + c = \\ t \arctan(\sqrt{t}) - \sqrt{t} + \arctan(\sqrt{t}) + c &= \left(3 - \frac{1}{x} \right) \arctan \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x}} \right) - \sqrt{2 - \frac{1}{x}} + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\arctan^3(e^x + 4) + \arctan(e^x + 4)}{1 + (e^x + 4)^2} e^x dx.$$

Operando la sostituzione $e^x + 4 = t$ e successivamente $\arctan(t) = y$, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan^3(e^x + 4) + \arctan(e^x + 4)}{1 + (e^x + 4)^2} e^x dx &= \int \frac{\arctan^3(t) + \arctan(t)}{1 + (t)^2} dt = \\ \int (y^3 + y) dy &= \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + c = \frac{\arctan^4(e^x + 4)}{4} + \frac{\arctan^2(e^x + 4)}{2} + c. \end{aligned}$$

ESERCIZIO. Fissato $n \in \mathbb{N}$, utilizzando la tecnica di integrazione per parti, determinare una formula ricorsiva per i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin(x))^{2n} dx, \quad \int (\cos(x))^{2n} dx.$$

Soluzione. La soluzione sarà discussa a ricevimento con gli studenti interessati.

2. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 34.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx, \quad \int \frac{x}{x^2 - a^2} dx,$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \quad \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx.$$

Soluzione.

Si ha

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a} \frac{1}{x - a} - \frac{1}{2a} \frac{1}{x + a},$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \left(\frac{1}{2a} \frac{1}{x - a} - \frac{1}{2a} \frac{1}{x + a} \right) dx = \frac{1}{2a} \log(|x - a|) - \frac{1}{2a} \log(|x + a|) + c.$$

Si ha

$$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2} dx = \int \frac{1}{2} \frac{D(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \log(|x^2 \pm a^2|) + c.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + 1} dx = \frac{1}{a} \int \frac{D(\frac{x}{a})}{\frac{x^2}{a^2} + 1} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

■

ESERCIZIO CONSIGLIATO: Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \quad a \neq 0,$$

utilizzando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a}$ avendo cura di ritrovare le formule determinate a lezione corrispondenti ai casi $\Delta \gtrless 0$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soluzione.

Operando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a}$ si ha $dx = \frac{1}{2a} dt$ e

$$ax^2 + bx + c = \frac{a}{4a^2}(t-b)^2 + b\frac{t-b}{2a} + c = \frac{t^2}{4a} - \frac{tb}{2a} + \frac{b^2}{4a} + \frac{tb}{2a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$\frac{t^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \frac{1}{4a}(t^2 - \Delta).$$

Se $\Delta > 0$, si ha $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{4a}{2a} \int \frac{1}{t^2 - \Delta} dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log|t - \sqrt{\Delta}| - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log|t + \sqrt{\Delta}| + c =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log|(2ax + b) - \sqrt{\Delta}| - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log|(2ax + b) + \sqrt{\Delta}| + c =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log |2ax - (-b + \sqrt{\Delta})| - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log |2ax - (-b - \sqrt{\Delta})| + c =$$

$$\frac{a}{x_+ - x_-} \log |x - x_+| - \frac{a}{x_+ - x_-} \log |x - x_-| + c.$$

Se $\Delta = 0$, si ha $x_0 = x_{\pm} = \frac{-b}{2a}$ e quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{4a}{2a} \int \frac{1}{t^2 - \Delta} dt = 2 \int \frac{1}{t^2} dt = -2 \frac{1}{t} + c = -2 \frac{1}{2ax + b} + c = -\frac{1}{a} \frac{1}{x - x_0} + c.$$

Se $\Delta < 0$, si ha $x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = x_1 \pm iy_1$ e quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{4a}{2a} \int \frac{1}{t^2 - \Delta} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 + |\Delta|} dt = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{|\Delta|}} \right) + c =$$

$$\frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + c =$$

$$\frac{1}{ay_1} \arctan \left(\frac{2ax + b}{2ay_1} \right) + c = \frac{1}{ay_1} \arctan \left(\frac{x - x_1}{y_1} \right) + c.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{5x - \sqrt{3}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx, \quad \int \frac{x - 4}{2x^2 + 5x - 3} dx.$$

Soluzione.

$$\int \frac{5x - \sqrt{3}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx.$$

Dato che in questo caso $a = 9$, $b = -6\sqrt{2}$, $c = 4$, si ha $\Delta = b^2 - 4ac = 72 - 144 = -72 < 0$. Si ha

$$\int \frac{5x}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx = \frac{5}{18} \int \frac{D(9x^2) - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx =$$

$$\frac{5}{18} \int \frac{D(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4) + 6\sqrt{2}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx =$$

$$\frac{5}{18} \log(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4) + \frac{5\sqrt{2}}{3} \int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx.$$

Calcoliamo ora

$$\int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx.$$

Dato che $\Delta < 0$, il Teorema fondamentale dell'Algebra implica che

$$9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 9[(x - (x_1 + iy_1))(x - (x_1 - iy_1))] = 9[(x - x_1)^2 + y_1^2].$$

Si possono allora ricavare x_1 , y_1 scrivendo

$$9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 9x^2 - 18xx_1 + 9x_1^2 + 9y_1^2,$$

per ottenere

$$x_1 = \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad y_1^2 = \frac{4 - 9x_1^2}{9} = \frac{4 - 9 \cdot \frac{2}{9}}{9} = \frac{2}{9}.$$

Ricordiamo che la forma

$$9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 9[(x - x_1)^2 + y_1^2],$$

può essere ottenuta direttamente a partire dalle soluzioni $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}}{2a} = x_1 \pm y_1$.

Si ha ora

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx &= \int \frac{1}{9[(x - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 + \frac{2}{9}]} dx = \frac{1}{9} \frac{9}{2} \int \frac{1}{[\frac{9}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 + 1]} dx = \\ &= \frac{1}{9} \sqrt{\frac{9}{2}} \int \frac{D(\sqrt{\frac{9}{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{3}))}{[(\sqrt{\frac{9}{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{3}))^2 + 1]} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) + c. \end{aligned}$$

Riassumendo si ha

$$\int \frac{5x - \sqrt{3}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx = \frac{5}{18} \log(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4) + \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \sqrt{3}\right) \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) + c.$$

Si suggerisce di calcolare l' integrale

$$\int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx,$$

ottenendo la forma

$$9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 9[(x - x_1)^2 + y_1^2],$$

direttamente a partire dalle soluzioni $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}}{2a} = x_1 \pm y_1$.

Si suggerisce inoltre di effettuare per esercizio il calcolo dell' integrale

$$\int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx,$$

operando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a} = \frac{t+6\sqrt{2}}{18}$.

$$\int \frac{x-4}{2x^2+5x-3} dx.$$

Dato che in questo caso $a=2, b=5, c=-3$, si ha $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 > 0$ e

$$x_{\pm} = \frac{-5 \pm 7}{4}, \quad x_+ = \frac{1}{2}, \quad x_- = -3.$$

Si può quindi scrivere

$$\frac{x-4}{2x^2+5x-3} = \frac{A_1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{A_2}{x+3}.$$

Calcoliamo $A_{1,2}$. Si ha

$$\frac{A_1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{A_2}{x+3} = \frac{A_1(x+3) + A_2(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})(x+3)} = 2 \frac{A_1x + 3A_1 + A_2x - \frac{A_2}{2}}{2x^2 + 5x - 3}.$$

In particolare deve aversi

$$\frac{x-4}{2x^2+5x-3} = 2 \frac{A_1x + 3A_1 + A_2x - \frac{A_2}{2}}{2x^2 + 5x - 3},$$

ovvero

$$x-4 = (2A_1 + 2A_2)x + (6A_1 - A_2).$$

Da questa identità ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} 2A_1 + 2A_2 = 1 \\ 6A_1 - A_2 = -4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = 1$. Sostituendo si ha

$$\int \frac{x-4}{2x^2+5x-3} dx = \int \left(-\frac{1}{2(x-\frac{1}{2})} + \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$-\frac{1}{2} \log \left| x - \frac{1}{2} \right| + \log |x + 3| + c.$$

Si suggerisce di calcolare per esercizio l' integrale dato effettuando prima il calcolo di

$$\int \frac{x}{2x^2 + 5x - 3} dx,$$

che si risolve come sopra costruendo a numeratore la derivata del denominatore, e successivamente calcolando con la scomposizione in fratti semplici

$$\int \frac{1}{2x^2 + 5x - 3} dx.$$

Si suggerisce inoltre di effettuare per esercizio il calcolo dell' integrale

$$\int \frac{1}{2x^2 + 5x - 3} dx.$$

operando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a} = \frac{t-5}{4}$. ■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 9x^3 - x^2 + 11x - 7}{x^2 + 2x - 8} dx, \quad \int \frac{x^3}{1 + x^2} dx.$$

Soluzione.

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 9x^3 - x^2 + 11x - 7}{x^2 + 2x - 8} dx.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, Operiamo la divisione con il metodo di Ruffini. Si ha

$$\frac{x^5 + 2x^4 - 9x^3 - x^2 + 11x - 7}{x^2 + 2x - 8} = 1 - x + x^3 + \frac{1 + x}{x^2 + 2x - 8}.$$

Per il calcolo di

$$\int \frac{1 + x}{x^2 + 2x - 8} dx,$$

osserviamo che $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$ e $x_{\pm} = -1 \pm 3$, $x_+ = 2$, $x_- = -4$ e poniamo

$$\frac{1 + x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 4}.$$

Dato che

$$\frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 4} = \frac{A_1x + 4A_1 + A_2x - 2A_2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{(A_1 + A_2)x + (4A_1 - 2A_2)}{x^2 + 2x - 8},$$

ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 4A_1 - 2A_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A_1 = \frac{1}{2}$ $A_2 = \frac{1}{2}$. Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + x}{x^2 + 2x - 8} dx &= \int \left(\frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{2(x + 4)} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \log |x - 2| + \frac{1}{2} \log |x + 4| + c. \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2x^4 - 9x^3 - x^2 + 11x - 7}{x^2 + 2x - 8} dx &= \int (1 - x + x^3) dx + \int \frac{1 + x}{x^2 + 2x - 8} dx = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \log |x - 2| + \frac{1}{2} \log |x + 4| + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, operiamo la divisione con il metodo di Ruffini. In questo caso si può operare la divisione rapidamente osservando che

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x+x^3-x}{1+x^2} = \frac{x+x^3}{1+x^2} + \frac{-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Se ne deduce che

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

ESERCIZIO: Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)} dx.$$

Soluzione.

Osserviamo che il determinante del polinomio di secondo grado vale $\Delta = 24 - 32 = -8 < 0$ con $x_{\pm} = x_1 \pm iy_1$, $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \sqrt{2}$. Scriviamo quindi

$$\frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} + \frac{C}{(x+2)},$$

Dato che

$$\begin{aligned} \frac{Ax+B}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} + \frac{C}{(x+2)} &= \frac{Ax(x+2) + B(x+2) + C(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)} = \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (2A+B-2\sqrt{6}C)x + (2B+8C)}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)} \end{aligned}$$

ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-2\sqrt{6}C=0 \\ 2B+8C=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A = -\frac{1}{4(3+\sqrt{6})}$, $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{(3+\sqrt{6})}$, $C = \frac{1}{4(3+\sqrt{6})}$. Risolviamo gli integrali relativi ai fratti semplici separatamente.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{D(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2\sqrt{6}}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8) + \sqrt{6} \int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx. \end{aligned}$$

Dato che $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \sqrt{2}$, si ha poi

$$\frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} = \frac{1}{(x - x_1)^2 + y_1^2} = \frac{1}{(x - \sqrt{6})^2 + 2}$$

e in particolare

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx &= \int \frac{1}{(x - \sqrt{6})^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{D\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + c. \end{aligned}$$

Riassumendo, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x + 2)} dx &= A \int \frac{x}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx + B \int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx + C \int \frac{1}{(x + 2)} dx = \\ &= A \frac{1}{2} \log(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8) + (A\sqrt{6} + B) \int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} dx + C \int \frac{1}{(x + 2)} dx = \\ &= A \frac{1}{2} \log(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8) + (A\sqrt{6} + B) \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + C \log|x + 2| + c = \\ &= -\frac{1}{4(3 + \sqrt{6})} \frac{1}{2} \log(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8) + \left(-\frac{\sqrt{6}}{4(3 + \sqrt{6})} + \frac{1}{2} - \frac{1}{(3 + \sqrt{6})}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4(3 + \sqrt{6})} \log|x + 2| + c = \\ &= -\frac{1}{8(3 + \sqrt{6})} \log(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4(3 + \sqrt{6})} \log|x + 2| + c. \end{aligned}$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{4x + 1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(3x^2 + 4)^4} dx$$

Soluzione.

$$\int \frac{4x + 1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx.$$

Si ha $a = 9$, $b = -6\sqrt{2}$, $c = 4$, e $\Delta = b^2 - 4ac = 72 - 144 = -72 < 0$. Il polinomio a denominatore ha radici complesse e coniugate di molteplicità due, $x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = x_1 \pm iy_1$, con $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx &= \frac{4}{18} \int \frac{18x - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx = \\ &= \frac{2}{9} \int \frac{D(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx + \frac{4\sqrt{2}}{3} \int \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx = \\ &= -\frac{2}{9} \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \int \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx. \end{aligned}$$

Dato che

$$9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 9[(x - x_1)^2 + y_1^2] = 9 \left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} \right],$$

si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx &= \int \frac{1}{\left[9\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right]^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left[\frac{9}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 1\right]^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{9}} \int \frac{D\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)}{\left[\left[\sqrt{\frac{9}{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]^2 + 1\right]^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{12} \int \frac{1}{[t^2 + 1]^2} dt, \end{aligned}$$

dove si è operata la sostituzione $t = \sqrt{\frac{9}{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. L' integrale

$$\int \frac{1}{[t^2 + 1]^2} dt$$

è stato svolto a lezione. Si ha

$$\int \frac{1}{[t^2 + 1]^2} dt = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t + c,$$

e sostituendo,

$$\int \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{\sqrt{\frac{9}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})}}{2(1 + [\sqrt{\frac{9}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})})]^2)} + \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{1}{2} \arctan \left[\sqrt{\frac{9}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right] + c.$$

Riassumendo

$$\begin{aligned} \int \frac{4x + 1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} &= -\frac{2}{9} \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)} + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1 \right) \int \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx = \\ &= -\frac{2}{9} \frac{1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)} + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1 \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{12} \frac{\sqrt{\frac{9}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})}}{2(1 + [\sqrt{\frac{9}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})})]^2)} + \frac{\sqrt{2}}{24} \arctan \left[\sqrt{\frac{9}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right] \right) + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(3x^2 + 4)^4} dx.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{(3x^2 + 4)^4} dx = \frac{1}{4^4} \int \frac{1}{(\frac{3}{4}x^2 + 1)^4} dx = \frac{1}{4^4} \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{D(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)^2 + 1 \right)^4} dx = \frac{2}{4^4 \sqrt{3}} \int \frac{1}{(1 + t^2)^4} dt.$$

Si ha in particolare

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + t^2)^4} dt &= \frac{t}{6} \frac{1}{(1 + t^2)^3} + \frac{5}{6} \int \frac{1}{(1 + t^2)^3} dt = \\ &= \frac{t}{6} \frac{1}{(1 + t^2)^3} + \frac{5}{6} \left(\frac{t}{4} \frac{1}{(1 + t^2)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt \right) = \\ &= \frac{t}{6} \frac{1}{(1 + t^2)^3} + \frac{5t}{24} \frac{1}{(1 + t^2)^2} + \frac{15}{24} \int \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt = \\ &= \frac{t}{6} \frac{1}{(1 + t^2)^3} + \frac{5t}{24} \frac{1}{(1 + t^2)^2} + \frac{15}{48} \frac{t}{(1 + t^2)} + \frac{15}{48} \arctan t + c. \end{aligned}$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(3x^2 + 4)^4} dx &= \frac{2}{4^4 \sqrt{3}} \left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{6} \frac{1}{(1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^3} + \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}x}{24} \frac{1}{(1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^2} + \frac{15}{48} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{(1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)} + \frac{15}{48} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right] + c = \\ &= \frac{x}{4^4 6} \frac{1}{(1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^3} + \frac{5x}{4^5 6} \frac{1}{(1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^2} + \frac{15}{4^6 3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{(1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)} + \frac{15}{4^5 6 \sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + c. \end{aligned}$$

■

3. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 35.

ESERCIZI CONSIGLIATI: Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_1^2 x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx, \quad \int_1^2 x^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx.$$

Soluzione.

$$\int_1^2 x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx.$$

Si ha $\Delta = (3)^2 - 4(-1)(-2) = 9 - 8 = 1$. Operiamo la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a} = \frac{t-3}{-2}$. Si ha

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x - 2 &= -\frac{1}{4}(t-3)^2 - \frac{3}{2}(t-3) - 2 = -\frac{1}{4}(t^2 - 6t + 9) - \frac{3t-9}{2} - 2 = \\ &= -\frac{1}{4}t^2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che $dx = -\frac{1}{2} dt$ e che $x = 2 \Rightarrow t = -1$ e $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Si ha quindi

$$\int_1^2 x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{t-3}{-2} \frac{1}{2} \sqrt{-t^2 + 1} \, dt = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 (3-t) \sqrt{-t^2 + 1} \, dt.$$

Osserviamo che

$$\int_{-1}^1 t \sqrt{-t^2 + 1} \, dt = 0,$$

perché è l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico. Operiamo ora la sostituzione $t = \sin(y)$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si ha $dt = \cos(y) \, dy$, $t = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ e $t = -1 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2}$ e quindi

$$\int_1^2 x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \sqrt{-t^2 + 1} \, dt = \frac{3}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\sin(y))^2} \cos(y) \, dy =$$

$$\frac{3}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(y)| \cos(y) \, dy = \frac{3}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) \, dy = \frac{3\pi}{16},$$

dove l'ultimo passaggio si può ottenere osservando che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(y) + \sin^2(y)) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{1}{2} y \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Altrimenti, si possono usare le formule di bisezione

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(2y)) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Si suggerisce di effettuare il calcolo di $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y) \, dy$ utilizzando una formula ricorsiva.

$$\int_1^2 x^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx.$$

Ragionando come sopra si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx &= -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \left(\frac{t-3}{-2} \right)^2 \frac{1}{2} \sqrt{-t^2 + 1} dt = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 (t-3)^2 \sqrt{-t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{16} \int_{-1}^1 (t^2 + 9) \sqrt{-t^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

In particolare, dal calcolo di cui sopra si ha

$$\frac{1}{16} \int_{-1}^1 9 \sqrt{-t^2 + 1} dt = \frac{3}{2} \frac{3}{8} \int_{-1}^1 \sqrt{-t^2 + 1} dt = \frac{3}{2} \frac{3\pi}{16} = \frac{9\pi}{32}.$$

Osserviamo poi che, ragionando come sopra

$$\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{-t^2 + 1} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(y) \cos^2(y) dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(y) - \sin^4(y)) dy = \frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(y) dy.$$

D' altra parte, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(y) dy &= -\frac{1}{4} \cos(y) \sin^3(y) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(y) dy = \\ &= -\frac{1}{4} (\cos(\frac{\pi}{2}) \sin^3(\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2}) \sin^3(-\frac{\pi}{2})) + \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Riassumendo, si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx &= \frac{1}{16} \int_{-1}^1 (t^2 + 9) \sqrt{-t^2 + 1} dt = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{-t^2 + 1} dt + \frac{9}{16} \int_{-1}^1 \sqrt{-t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) + \frac{9\pi}{32} = \frac{\pi}{16} \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{2} \right) = \frac{\pi}{16} \frac{37}{8} = \frac{37\pi}{128}. \end{aligned}$$

■