SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 27-28-29-30

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 27 – 28 – 29 – 30.

1

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 27 – 28 – 29 – 30.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1)}{x^\alpha}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1) + \frac{5}{12}x^4}{e^{x^\alpha} - 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1) + \frac{1}{12}(e^{5x^4} - 1)}{x \arctan(x^\alpha)}.$$

Soluzione.

Si ha

$$\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o((x^2)^2) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - 1\right) = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha} = -\frac{5}{12} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{4-\alpha}(1+o(1)) = \begin{cases} 0^- & 4-\alpha > 0, \\ -\frac{5}{12} & 4-\alpha = 0, \\ -\infty & 4-\alpha < 0. \end{cases}$$

Si ha poi

$$\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o((x^2)^3) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7) - 1\right) = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{x^6}{3} - 2\frac{x^6}{6!} + o(x^6) = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{x^6}{3}\left(1 - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}\right) + o(x^6), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1) + \frac{5}{12}x^4}{e^{x^\alpha} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{119}{360}x^6 + o(x^6)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \frac{119}{360} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{6-\alpha} \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \begin{cases} 0^+ & 6-\alpha > 0, \\ \frac{119}{360} & 6-\alpha = 0, \\ +\infty & 6-\alpha < 0. \end{cases}$$

Inoltre, dato che

$$\frac{1}{12}(e^{5x^4} - 1) = \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{12} \frac{(5x^4)^2}{2!} + o((x^4)^2) = \frac{5}{12}x^4 + o(x^7), \quad x \rightarrow 0^+,$$

e

$$\arctan(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha), \quad x \rightarrow 0^+,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x) - 1) + \frac{1}{12}(e^{5x^4} - 1)}{x \arctan(x^\alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{119}{360}x^6 + o(x^6)}{x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})} = \begin{cases} 0^+ & 5 - \alpha > 0, \\ \frac{119}{360} & 5 - \alpha = 0, \\ +\infty & 5 - \alpha < 0. \end{cases}$$

■

ESERCIZIO: Utilizzare le formule di addizione e gli sviluppi di Mac Laurin per $\sin y$ e $\cos y$ per calcolare il Polinomio di Taylor di ordine 3 di $f(x) = x \sin x$ in $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Soluzione.

Sia $g(y) = f(\frac{\pi}{3} + y)$. Si ha

$$\begin{aligned} g(y) &= \left(\frac{\pi}{3} + y\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + y\right) = \left(\frac{\pi}{3} + y\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(y) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(y)\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{3} + y\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^3)) + \frac{1}{2}(y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4))\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{3} + y\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 + \frac{y}{2} - \frac{y^3}{12} + o(y^3)\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)y + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\right)y^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{36}\right)y^3 + o(y^3) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)y + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)y^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right)y^3 + o(y^3). \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$T_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3.$$

ESERCIZIO: Calcolare il seguente limite al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(1 + \sqrt{x} \log x)^\beta} - 1 \right) \frac{\log(1 + x^{\frac{3}{2}}) - \sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}}{\log(x) \left[(1 + x)^{\frac{1}{10}} - 1 \right] - \frac{1}{5}(x^{\frac{x}{2}} - 1)}.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x = 0^-,$$

si ha

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{x} \log x)^\beta} - 1 = 1 - \beta \sqrt{x} \log x + o(\sqrt{x} \log x) - 1 = -\beta \sqrt{x} \log x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Il secondo fattore nel limite vale:

$$\frac{\log(1 + x^{\frac{3}{2}}) - \sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}}{\log(x) \left[(1 + x)^{\frac{1}{10}} - 1 \right] - \frac{1}{5}(x^{\frac{x}{2}} - 1)} = \frac{\frac{7}{6}x^{\frac{3}{2}} + o(x^2)}{-\frac{1}{40}x^2(\log x)^2 + o(x^2(\log x)^2)}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(1 + \sqrt{x} \log x)^\beta} - 1 \right) \frac{\log(1 + x^{\frac{3}{2}}) - \sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}}{\log(x) \left[(1 + x)^{\frac{1}{10}} - 1 \right] - \frac{1}{5}(x^{\frac{x}{2}} - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\beta \sqrt{x} \log x (1 + o(1))) \left(-\frac{140}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2 (\log x)^2} \right) \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = \beta \frac{140}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\log x)^2} = 0^+.$$

■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità in $x = 0$ di

$$f(x) = \sqrt[6]{|e^{x^3} - 1 - x^3|}, \quad f(x) = \sqrt{|e^{x^3} - 1 - x^3|},$$

$$f(x) = \left(e^{x^{\frac{1}{5}}} - 1 - x^{\frac{1}{5}} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Soluzione.

Dato che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^2)$, $y \rightarrow 0$ si ha

$$e^{x^3} - 1 - x^3 = 1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2} + o((x^3)^2) - 1 - x^3 =$$

$$\frac{x^6}{2} + o(x^6), \quad x \rightarrow 0,$$

Se ne deduce che

$$\sqrt[6]{|e^{x^3} - 1 - x^3|} = \sqrt[6]{\left| \frac{x^6}{2} + o(x^6) \right|} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \sqrt[6]{x^6} (1 + o(1)) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} |x| (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Il limite del rapporto incrementale mostra a questo punto che f ha un punto angoloso in $(0, 0)$. Inoltre

$$\sqrt{|e^{x^3} - 1 - x^3|} = \sqrt{\left| \frac{x^6}{2} + o(x^6) \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^6} (1 + o(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} |x|^3 (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Il limite del rapporto incrementale mostra a questo punto che f è derivabile in $x = 0$.

Si osserva poi, studiando il grafico qualitativo di $e^y - 1 - y$, $y \in \mathbb{R}$ che $e^y - 1 - y \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}$ e che il segno di uguaglianza vale se e solo se $y = 0$. Se ne deduce che le espressioni di cui sopra $\sqrt[6]{|e^{x^3} - 1 - x^3|}$ e $\sqrt{|e^{x^3} - 1 - x^3|}$ sono ben definite anche senza il modulo e in particolare che è ben definita la funzione $\left(e^{x^{\frac{1}{5}}} - 1 - x^{\frac{1}{5}} \right)^\alpha$ $x \in \mathbb{R}$. Si ha poi

$$\left(e^{x^{\frac{1}{5}}} - 1 - x^{\frac{1}{5}} \right)^\alpha = \left(e^{x^{\frac{1}{5}}} - 1 - x^{\frac{1}{5}} \right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha} \left(x^{\frac{2}{5}} + o(x^{\frac{2}{5}}) \right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha} x^{\frac{2\alpha}{5}} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Se ne deduce calcolando il limite del rapporto incrementale che

$$\begin{cases} f \text{ è derivabile in } x = 0, & \text{se } \frac{2\alpha}{5} > 1, \\ f \text{ ha un punto angoloso in } (0, 0), & \text{se } \frac{2\alpha}{5} = 1, \\ f \text{ ha un punto di cuspidità in } (0, 0), & \text{se } \frac{2\alpha}{5} < 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO: Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ di

$$f(x) = \sqrt[7]{|e^x - 1 - x|}.$$

Soluzione.

Come osservato precedentemente, $e^x - 1 - x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $e^x - 1 - x = 0, \iff x = 0$. Dato che la

funzione $\sqrt[7]{y}$ è derivabile in $(0, +\infty)$, f è composta di funzioni derivabili in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dunque derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per la derivabilità in $x = 0$, ragionando come sopra si ha

$$\sqrt[7]{|e^x - 1 - x|} = \sqrt[7]{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{\sqrt[7]{2}} \sqrt[7]{x^2}(1 + o(1)) = \frac{1}{\sqrt[7]{2}} x^{\frac{2}{7}}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Il limite del rapporto incrementale mostra a questo punto che f ha un punto di cuspidità in $(0, 0)$. ■

ESERCIZIO: Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ di

$$f(x) = \sqrt{|\log(1 + |x|^5) - 2|}.$$

Soluzione.

È chiaro che gli eventuali punti di non derivabilità possono essere solo $x = 0$ (perché l'argomento del logaritmo contiene $|x|$) e gli eventuali punti dove si annulla l'argomento $\log(1 + |x|^5) - 2$.

Per quanto riguarda $x = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{|\log(1 + |x|^5) - 2|} &= \sqrt{||x|^5 + o(|x|^5) - 2|} = \sqrt{2 - |x|^5 + o(|x|^5)} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}|x|^5 + o(|x|^5)} = \\ &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{4}|x|^5 + o(|x|^5)\right), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{4}|x|^5 + o(|x|^5)\right) - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}|x|^5 + o(|x|^5)}{x} = 0,$$

e quindi f risulta derivabile in $x = 0$.

Si ha poi

$$\log(1 + |x|^5) - 2 = 0 \iff |x|^5 = e^2 - 1 \iff |x| = (e^2 - 1)^{\frac{1}{5}}.$$

Definiamo $x_{\pm} = \pm (e^2 - 1)^{\frac{1}{5}}$. Dato che f è pari, è sufficiente studiare la derivabilità di f in $x = x_+$. Dato che $x_+ > 0$, si ha

$$\log(1 + |x|^5) - 2 = \log(1 + x^5) - 2 = \log(1 + x_+^5) - 2 + \frac{5x_+^4}{1 + x_+^5}(x - x_+) + o(x - x_+), \quad x \rightarrow x_+.$$

In particolare

$$\sqrt{|\log(1 + |x|^5) - 2|} = \sqrt{\left| \frac{5x_+^4}{1 + x_+^5}(x - x_+) + o(x - x_+) \right|} = \sqrt{\frac{5x_+^4}{1 + x_+^5}} \sqrt{|(x - x_+)|} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Se ne deduce che x_+ e quindi anche x_- sono di cuspidità per f . ■

ESERCIZIO: Calcolare gli sviluppi di Mac Laurin di ordine $n = 2$ e $n = 3$ per

$$f(x) = \log(1 + x + x^2)$$

Soluzione.

Dato che $\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, si ha

$$\log(1 + x + x^2) = (x + x^2) - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{3}(x + x^2)^3 + o((x + x^2)^3) = x + x^2 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Se ne deduce che

$$T_2(x) = x + \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3.$$

■

ESERCIZIO: Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+2x-x^2} - \sin 2x - (e^{5x^2+x^4} - 1) - 1 + 4x}{\log(1+x^3)}$$

Soluzione.

Il limite vale $-\frac{32}{3}$. ■

ESERCIZIO: Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine $n = 4$ per

$$f(x) = \log(\cos x).$$

Soluzione.

Si ha $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, dove si è osservato preliminarmente che il termine di ordine $n = 3$ nello sviluppo del logaritmo contribuirebbe con potenze di x di ordine $k \geq 6$ ovvero con termini di ordine pari a $o(x^5)$. Si ha poi

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2\right) = \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2 + o(x^5) + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$T_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}.$$