SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 24-25-26

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 24.

ESERCIZIO. Studiare il grafico di $f(x) = \arctan(\log|x|)$ determinando dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, estremi relativi e assoluti e punti di non derivabilità.

Soluzione.
Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

La funzione è pari. È quindi sufficiente studiare f in $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}.$$

Concludiamo che f ha asintoto orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{+}.$$

Dato che f è pari si ha in particolare,

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{+},$$

e quindi f si può estendere per continuità in $x_0 = 0$ ponendo $f(0) = -\frac{\pi}{2}$.

$$Df(x) = \frac{1}{1 + (\log x)^2} \cdot \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0^+} Df(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + (\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(\log x)^{-2} + 1} \cdot \frac{1}{x\,(\log x)^2} = 1 \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

per il teorema di continuità della derivata prima (vedere **[B]** §9.4 pg. 12) si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Dato che f è pari si ha anche

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\lim_{y\to 0^+} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0},$$

e quindi $(0, -\frac{\pi}{2})$ è un punto di cuspide.
Inoltre, dato che Df è positiva per $x > 0$, e dato che f è pari, concludiamo che

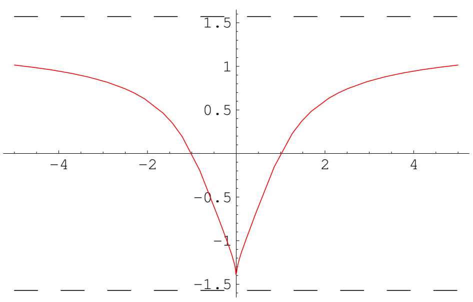
$$\begin{cases} Df(x) > 0, & x > 0 \\ Df(x) < 0, & x < 0 \end{cases},$$

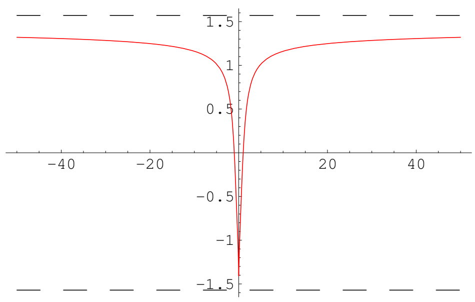
ovvero che f è monotona strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. In particolare $x_0 = 0$ è punto di minimo assoluto per la f estesa in $\mathbb{R}$,

$$f(0) = -\frac{\pi}{2} = \min_{\mathbb{R}} f$$

e

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \frac{\pi}{2}.$$





2. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 25 – 26.

ESERCIZIO. Fissati $\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, studiare il grafico della funzione di Gauss o Gaussiana

$$f(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Soluzione.
Si ha

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+.$$

Concludiamo che f ha asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to \pm\infty$.

$$Df(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \right], \; x \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\begin{cases} Df(x) < 0, & x > \mu \\ Df(\mu) = 0, & \\ Df(x) > 0, & x < \mu \end{cases}$$

ovvero che f è monotona strettamente crescente in $(-\infty, \mu)$, strettamente decrescente in $(\mu, +\infty)$ e si annulla se e solo se $x = \mu$. Quindi $x_0 = \mu$ è punto di massimo assoluto per f in $\mathbb{R}$,

$$f(\mu) = 1 = \max_{\mathbb{R}} f$$

e

$$\inf_{\mathbb{R}} f = 0.$$

Inoltre

$$D^2 f(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \right]^2 - e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma^2} = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 1 \right), \; x \in \mathbb{R},$$

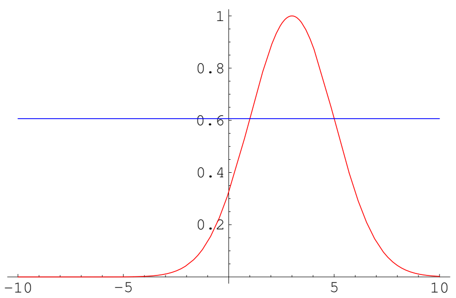
e quindi

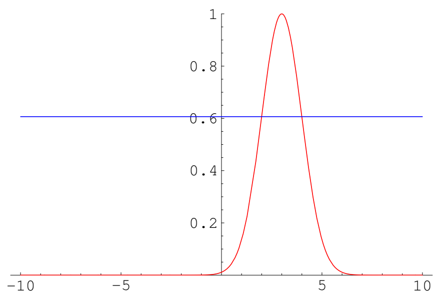
$$\begin{cases} D^2 f(x) < 0, & x \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma) \\ D^2 f(\mu \pm \sigma) = 0, & \\ D^2 f(x) > 0, & x \in (-\infty, \mu - \sigma) \cup (\mu + \sigma, +\infty). \end{cases}$$

Concludiamo che f è strettamente concava in $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, strettamente convessa in $(-\infty, \mu - \sigma) \cup (\mu + \sigma, +\infty)$ e in particolare che i punti

$$(\mu \pm \sigma, f(\mu \pm \sigma)) = (\mu \pm \sigma, e^{-\frac{1}{2}}),$$

sono punti di flesso. Vedere i grafici di cui sotto per il caso $\mu = 3$ con $\sigma = 2$ (a sinistra) e $\sigma = 1$ (a destra). La linea in blu indica il valore dei flessi.





ESERCIZIO. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} \log\left(\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)\right).$$

Soluzione.
Si ha

$$\log\left(\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)\right) = \frac{\log\left(1 + \cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right) - 1\right)}{\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right) - 1} \left(\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right) - 1\right) =$$

$$\frac{\log\left(1 + \cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right) - 1\right)}{\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right) - 1} \frac{\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right) - 1}{\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)^2} \left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)^2.$$

Quindi

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} \log\left(\cos\left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} \cdot \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} \left(2 \cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)^2 =$$

$$1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} \cdot e^{-\frac{2x}{x-1}} = -2 \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} \cdot e^{-\frac{2x}{x-1}}.$$

dove abbiamo usato il fatto che se il prodotto dei limiti non dà luogo a forme indeterminate, allora il limite del prodotto è il prodotto dei limiti. Notare che in questo caso, dato che i primi due limiti sono finiti, non si possono avere forme indeterminate. Per completezza bisogna ricordare anche che il Teorema del prodotto dei limiti richiede l' esistenza dei limiti stessi. Per quanto riguarda questo punto, verificheremo a posteriori che anche il terzo limite esiste, finito o infinito. Infatti,

$$\frac{1}{(x-1)^\alpha}-\frac{2x}{x-1}=\begin{cases}\frac{1}{x-1}\left(-2x+(x-1)^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{x-1}\left(-2+o(1)\right), & 1-\alpha>0\\ \frac{1}{x-1}\left(-2x+1\right)=\frac{1}{x-1}\left(-1+o(1)\right), & 1-\alpha=0\\ \frac{1}{(x-1)^\alpha}\left(1-2x(x-1)^{\alpha-1}\right)=\frac{1}{(x-1)^\alpha}\left(1+o(1)\right), & 1-\alpha<0\end{cases}\quad,\quad x\to 1^+,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}}\cdot e^{-\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}-\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}-\frac{2x}{x-1}}=\begin{cases}e^{(+\infty)\cdot(-2)}=e^{-\infty}=0^+, & 1-\alpha>0\\ e^{(+\infty)\cdot(-1)}=e^{-\infty}=0^+, & 1-\alpha=0\\ e^{(+\infty)\cdot(1)}=e^{+\infty}=+\infty, & 1-\alpha>0.\end{cases}$$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^\alpha}}\log\left(\cos\left(2\cdot e^{-\frac{x}{x-1}}\right)\right)=\begin{cases}-2\cdot 0^+=0^-, & \alpha\le 1\\ -2\cdot(+\infty)=-\infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

■

ESERCIZIO. Studiare il grafico di

$$f(x)=x-\sqrt[7]{1-e^{-7x}}.$$

Soluzione.
Si ha

$$\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[7]{1-e^{-7x}}\right)=+\infty-\sqrt[7]{1-0}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt[7]{1-e^{-7x}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-y-\sqrt[7]{1-e^{7y}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-y-e^y\sqrt[7]{e^{-7y}-1}\right)=$$

$$\lim_{y\to+\infty} e^y\left(-\frac{y}{e^y}-\sqrt[7]{e^{-7y}-1}\right)=+\infty\left(0-\sqrt[7]{0-1}\right)=+\infty.$$

Si verifica facilmente che

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{y\to+\infty}-\frac{e^y}{y}(1+o(1))=-\infty.$$

Concludiamo che f non ha asintoto obliquo per $x\to-\infty$. Viceversa, si ha immediatamente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=1,$$

e quindi f ha asintoto obliquo per $x\to+\infty$ la retta $y=x-1$.
Si ha poi

$$Df(x)=1-\frac{1}{7}\left(1-e^{-7x}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(-e^{-7x}\right)\cdot(-7)=1-e^{-7x}\left(1-e^{-7x}\right)^{-\frac{6}{7}},$$

e in particolare

$$\mathrm{dom}(Df)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,1-e^{-7x}\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} Df(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\left(1-e^{-7x}\left(1-e^{-7x}\right)^{-\frac{6}{7}}\right)=1-\lim_{x\to 0^\pm}\left(1-e^{-7x}\right)^{-\frac{6}{7}}=$$

$$1-\lim_{x\to 0^\pm}\left(\frac{1-e^{-7x}}{-7x}(-7x)\right)^{-\frac{6}{7}}=1-\left((-1)\cdot(0^\mp)\right)^{-\frac{6}{7}}=1-(\pm\infty)^{\frac{6}{7}}=-\infty.$$

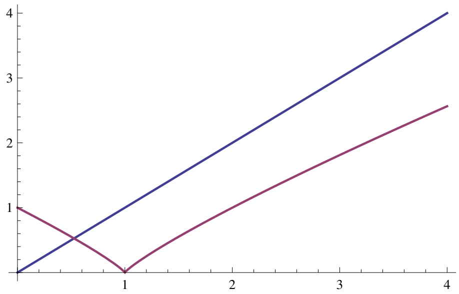
Concludiamo che $(0, f(0)) = (0, 0)$ è un punto di tangenza verticale.
Per studiare il segno di Df usiamo il metodo grafico. Poniamo $t = e^{-7x}$, in modo che $t \in (0, +\infty)$ se $x \in \mathbb{R}$, e osserviamo che

$$Df(x) \geq 0 \quad \iff \quad 1 - e^{-7x}\left(1 - e^{-7x}\right)^{-\frac{6}{7}} \geq 0 \iff 1 - t(1-t)^{-\frac{6}{7}} \geq 0.$$

Studiamo allora la disequazione $1 - t(1-t)^{-\frac{6}{7}} \geq 0$ per $t \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Dato che $(1-t)^{-\frac{6}{7}} > 0$, si ha,

$$1 - t(1-t)^{-\frac{6}{7}} \geq 0 \quad \iff \quad t \leq (1-t)^{\frac{6}{7}}.$$

Dato che $g(t) = t$ è continua e monotona strettamente crescente in $[0, 1]$ e $h(t) = (1-t)^{\frac{6}{7}}$ è continua e monotona strettamente decrescente in $[0, 1]$, l'equazione $g(t) = h(t)$ ha al più una soluzione per $t \in [0, 1]$. Dato che $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, concludiamo (usando il Teorema degli zeri) che esiste uno ed un solo $t_0 \in (0, 1)$, tale che $g(t_0) = h(t_0)$. Inoltre si verifica facilmente che $Dg(t) - Dh(t) = 1 + \frac{6}{7}\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{7}}}$ è negativa in $(1, 1 + (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}})$, nulla in $1 + (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}}$ e positiva in $(1 + (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}}, +\infty)$, ovvero che $g(t) - h(t) \geq g(1 + (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}}) - h(1 + (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}}) = 1 + (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}} - (\frac{6}{7})^6 > (\frac{6}{7})^{\frac{1}{7}}$. In particolare $g(t) < h(t) \iff 0 < t < t_0$.



Sia $x_0 = -\frac{1}{7}\log(t_0)$. Dato che $t_0 \in (0, 1)$, è chiaro che $x_0 > 0$. Si ha quindi

$$Df(x) < 0 \iff e^{-7x} < t_0, \; Df(x) = 0 \iff e^{-7x} = t_0,$$

ovvero

$$Df(x) > 0, \; x > x_0, \; Df(x_0) = 0, \; Df(x) < 0, \; x < x_0,$$

e concludiamo che f è monotona decrescente in $(-\infty, x_0)$ monotona crescente in $(x_0, +\infty)$ e ha quindi un punto di minimo relativo e assoluto in $(x_0, f(x_0))$. Osserviamo anche che $f(x_0) < 0$, perché $f(0) = 0$, $x_0 > 0$ e f è strettamente decrescente in $(0, x_0)$.
Si ha poi, dopo qualche semplificazione

$$D^2 f(x) = D\left(1 - e^{-7x}\left(1 - e^{-7x}\right)^{-\frac{6}{7}}\right) = e^{-7x}\left(1 - e^{-7x}\right)^{-\frac{13}{7}}\left(7 - e^{-7x}\right).$$

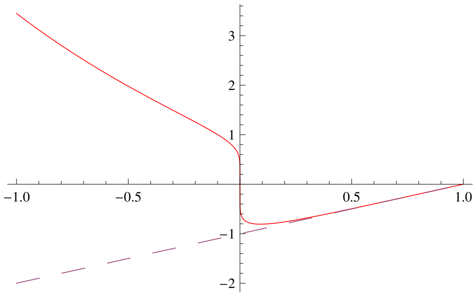
Concludiamo che

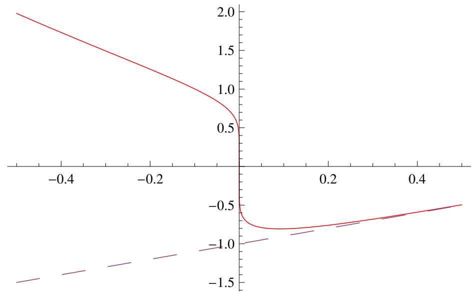
$$D^2 f(x) > 0 \iff 1 < e^{-7x} < 7, \quad D^2 f(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{7}\log(7),$$

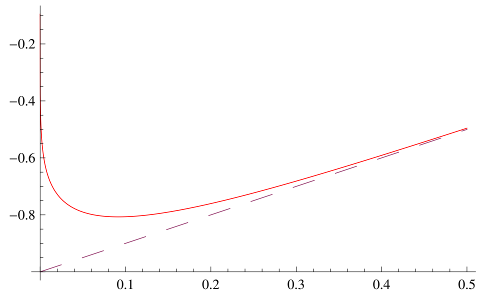
e quindi in particolare che f è strettamente convessa in $(-\infty, -\frac{1}{7}\log(7)) \cup (0, +\infty)$ e strettamente concava in $(-\frac{1}{7}\log(7), 0)$ e che f ha flessi in $x_1 = -\frac{1}{7}\log(7)$ e $x_2 = 0$.
Per disegnare il grafico correttamente è necessario stabilire la posizione relativa tra la funzione e l' asintoto obliquo per $x > 0$. Infatti osserviamo che, per esempio, non abbiamo ancora informazioni sul valore del minimo di $f(x_0) = f(-\frac{1}{7}\log(t_0))$. In questo caso possiamo risolvere il problema osservando che

$$f(x) - (x-1) = x - \sqrt[7]{1 - e^{-7x}} - (x-1) = -\sqrt[7]{1 - e^{-7x}} + 1 > -1 + 1 = 0, \; \forall x > 0$$

e quindi il grafico di f si trova sopra alla retta $y = x - 1$.







[FACOLTATIVO]
Vediamo ora un argomento più difficile, che ha però il vantaggio di non richiedere alcuna informazione sulla disuguaglianza $f(x) \gtreqless x-1$, ma solo sulla la convessità di f.
In particolare, dimostreremo quanto segue. Se:
(i) f è continua in $[0,+\infty)$, derivabile due volte in $(0,+\infty)$ e $D^2 f(x) > 0$, $\forall\, x \in (0,+\infty)$;
(ii) f ha un asintoto obliquo o orizzontale per $x \to +\infty$ di coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$, che indichiamo con $y = mx + q$.
Allora:
(a) $f(0) > q$,
(b) $Df(x) < m\ \forall\, x \in (0,+\infty)$, $Df(x) \to m^-$, $x \to +\infty$, e il grafico di f giace sopra il grafico dell' asintoto obliquo, ovvero $f(x) > mx+q$, $\forall\, x \in [0,+\infty)$. In particolare $f(x) - (mx+q) \to 0^+$, $x \to +\infty$.

Dimostrazione
Osserviamo innanzitutto che la funzione $g(x) = f(x) - (mx+q)$ è continua in $[0,+\infty)$, derivabile due volte in $(0,+\infty)$ e $D^2 g(x) > 0$, $\forall\, x \in (0,+\infty)$ e ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Dato che g è strettamente convessa in $(0,+\infty)$, allora Dg è monotona strettamente crescente e quindi ammette limite per $x \to +\infty$. Segue dal Teorema dell' asintoto (vedere sotto) che

$$\lim_{x\to+\infty} Dg(x) = 0. \tag{2.1}$$

Concludiamo in particolare che $Dg(x) < 0\ \forall\, x \in (0,+\infty)$.
Dato che $Dg(x) < 0 \iff Df(x) < m$ e $Df(x) \to m^- \iff Dg(x) \to 0^-$, risulta dimostrato che $Df(x) < m\ \forall\, x \in (0,+\infty)$ e $Df(x) \to m^-$, $x \to +\infty$.
Osserviamo inoltre che se $g(x) \leq 0$ per qualche $x > 0$, allora, dato che g è strettamente decrescente (perché $Dg(x) < 0\ \forall\, x \in (0,+\infty)$) allora $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$ contro l'ipotesi che g ammetta $y = 0$ come asintoto orizzontale. Risulta allora dimostrato che $g(x) > 0\ \forall\, x \in (0,+\infty)$, ovvero che $f(x) > mx+q$ $\forall\, x \in (0,+\infty)$ e quindi in particolare che $f(x) - (mx+q) \to 0^+$ $x \to +\infty$.
Per dimostrare la parte (a), osserviamo che la tesi è ora equivalente a $g(0) > 0$. Se supponiamo per assurdo che $g(0) \leq 0$, allora, dato che $g(x_1) > 0$ per $x_1 > 0$, dal Teorema di Lagrange, si avrebbe

$$\exists\, c \in (0, x_1)\ :\ Dg(c) = \frac{g(x_1) - g(0)}{x_1 - 0} = \frac{g(x_1) - g(0)}{x_1} \geq \frac{g(x_1)}{x_1} > 0,$$

che è assurdo perché $Dg(x) < 0\ \forall\, x \in (0,+\infty)$. ∎

Osservazione
Un corollario immediato di quanto visto è che se f è definita in un intorno di $+\infty$, è ivi derivabile due volte, $D^2 f(x)$ è definitivamente strettamente positiva per $x \to +\infty$ e f ha un asintoto obliquo $y = mx+q$ per $x \to +\infty$, allora il grafico di f giace definitivamente sopra il grafico dell' asintoto e vale $Df(x) \to m^-$, per $x \to +\infty$. Infatti, sia $M > 0$ tale che f è continua in $[M, +\infty)$ e $D^2 f(x) > 0$, $\forall\, x > M$. La funzione $h(x) = f(x + M)$ è continua in $[0, +\infty)$, verifica $D^2 h(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ e ha asintoto obliquo $y = mx+q+Mm$ per $x \to +\infty$. Quindi h verifica le ipotesi (i) e (ii) di cui sopra e in particolare valgono le (a) e (b) per h. Ritornando a $f(x) = h(x - M)$ si ha che il grafico di f giace definitivamente sopra il grafico di $mx + q$ e $Df(x) \to m^-$, per $x \to +\infty$.
Risultati analoghi valgono per funzioni concave e per asintoti per $x \to -\infty$. $\square$

TEOREMA [Teorema dell'asintoto]*Sia $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivabile e supponiamo che g abbia un asintoto orizzontale, $g(x) \to \ell$, $x \to +\infty$ ($\ell \in \mathbb{R}$). Se esiste il limite della derivata $Dg(x)$ per $x \to +\infty$ allora*

$$\lim_{x\to+\infty} Dg(x) = 0.$$

Dimostrazione
Dal Teorema del valor medio, per ogni $x > 0$, esiste $\xi \in (x, x + 1)$ tale che:

$$Dg(\xi) = g(x + 1) - g(x).$$

Sia x_n una qualunque successione $x_n \to +\infty$, per $n \to +\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ è ben definito $\xi_n \in (x_n, x_n + 1)$ e in particolare $\xi_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} Dg(\xi_n) = \lim_{n\to+\infty} (g(x_n + 1) - g(x_n)) = \ell - \ell = 0.$$

Per ipotesi il limite di $Dg(x)$ per $x \to +\infty$ esiste, quindi coincide con il limite lungo una successine arbitratria

$$\lim_{x\to+\infty} Dg(x) = \lim_{n\to+\infty} Dg(\xi_n) = 0.$$

$\blacksquare$

Osservazione
Il controesempio che segue mostra che esistono funzioni che hanno un asintoto orizzontale ma il limite della derivata non esiste. Infatti la funzione $g(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2)$, $x \in (0, +\infty)$ verifica $g(x) \to 0$, $x \to +\infty$ ma

$$Dg(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2),$$

il cui limite per $x \to +\infty$ chiaramente non esiste.