

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §9.

1

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §9.

§9.2

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $D(\cos x) = -\sin x$ e $D(\sin x) = \cos x$ nei loro domini naturali.

Soluzione.

- $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Si ha,

$$D(\log x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0 + h) - \log(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x_0})}{h} = \frac{1}{x_0}.$$

- $D(\cos x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Si ha,

$$\begin{aligned} D(\cos x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h) - 1) - \sin(x_0)\sin(h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)\sin(h)}{h} = \cos(x_0) \cdot 0 - \sin(x_0) \cdot 1 = -\sin x_0. \end{aligned}$$

- $D(\sin x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Si ha,

$$\begin{aligned} D(\sin x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0)\sin(h)}{h} = \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0). \end{aligned}$$

■

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\cosh x) = \sinh x$ e $D(\sinh x) = \cosh x$ nei loro domini naturali.

Soluzione.

Dato che $D(e^x) = e^x$, usando il teorema di derivazione della somma e della funzione composta, si ha

$$D(\cosh x) = \frac{1}{2}D(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}D(e^x) + \frac{1}{2}D(e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$D(\sinh x) = \frac{1}{2}D(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}D(e^x) - \frac{1}{2}D(e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO. Dimostrare che

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

Soluzione.

Si osserva che, usando il teorema di derivazione del prodotto e della funzione composta,

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f(g)^{-1}) = Df \cdot (g)^{-1} + f \cdot D((g)^{-1}) = Df \cdot (g)^{-1} + f \cdot (-1)((g)^{-2})Dg = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

ESERCIZI: Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nei loro domini naturali.

$$\tanh(x), \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{1}{x^2 \log x}, \quad e^{\frac{x^4}{x^2-1}}, \quad (\log x)^{\sin x}.$$

Ricordiamo che $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Soluzione.

- $D(\tanh(x)) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Si ha

$$D(\tanh(x)) = D\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

- $D\left(\frac{1}{\log x}\right) = -\frac{1}{x \log^2(x)}, \quad x \in (0, +\infty).$

Si ha

$$D\left(\frac{1}{\log x}\right) = D((\log x)^{-1}) = (-1)(\log(x))^{-2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \log^2(x)}.$$

- $D\left(\frac{1}{x^2 \log x}\right) = -\frac{2 \log x + 1}{x^3 \log^2(x)}, \quad x \in (0, +\infty).$

Si ha

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{x^2 \log x}\right) &= D((x^2 \log x)^{-1}) = (-1)(x^2 \log(x))^{-2} \left(2x \log x + x^2 \frac{1}{x}\right) = \\ &= -\frac{2x \log x + x}{x^4 \log^2(x)} = -\frac{2 \log x + 1}{x^3 \log^2(x)}. \end{aligned}$$

- $D\left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \cdot 2x^3 \cdot \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}, \quad x \notin \{-1, +1\}.$

Si ha

$$\begin{aligned} D\left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) &= \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \frac{4x^3(x^2-1) - 2x \cdot x^4}{(x^2-1)^2} = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5}{(x^2-1)^2} = \\ &= \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2} = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \cdot 2x^3 \cdot \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

- $D\left((\log x)^{\sin x}\right) = \left(\cos(x) \log(\log(x)) + \frac{\sin(x)}{x \log(x)}\right), x > 1.$

Si ha

$$D\left((\log x)^{\sin(x)}\right) = D\left(e^{\sin(x) \log(\log(x))}\right) = (\log x)^{\sin x} \left(\cos(x) \log(\log(x)) + \sin(x) \frac{1}{\log(x)} \frac{1}{x}\right).$$

■

ESERCIZI: Dimostrare che per $y \in (-1, 1)$, si ha

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad D(\arccos y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Osservare che i domini naturali delle derivate delle funzioni circolari inverse non coincidono con quelli delle funzioni stesse.

Soluzione.

Per la funzione $\arccos y$, ricordiamo che $g(y) = \arccos y$, $y \in [-1, 1]$ è la inversa di $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

Osserviamo che, per $x \in (0, \pi)$, si ha $\sin x > 0$ e quindi in particolare $\sin x = \sqrt{1 - (\cos x)^2}$. Quindi

$$Df(x) = -\sin x = -\sqrt{1 - (\cos x)^2} = -\sqrt{1 - y^2}, \quad y = \cos(x), \quad x \in (0, \pi).$$

Dal Teorema di derivazione della funzione inversa si ha

$$\begin{aligned} D(g(y)) &= \frac{1}{Df(x)} \Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{-\sin x} \Big|_{y=\cos(x)} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \Big|_{y=\cos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Discutere in modo analogo la funzione $\arcsin y$.

■

§9.3

ESERCIZIO. Determinare la retta tangente a

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \log(x-5),$$

nel punto $x = 6$.

Soluzione.

Iniziamo con il calcolo di $f(6)$. Si ha

$$f(6) = \frac{e^6}{6} \log(1) = 0.$$

Per determinare la retta tangente, calcoliamo la derivata $Df(6)$. È utile in questo caso calcolare direttamente il limite del rapporto incrementale. Sia $x = 6 + y$. Per $y \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x} \log(x-5) &= \frac{e^{6+y}}{(6+y)} \log(1+y) = \frac{e^6}{6} \cdot e^y \cdot \left(1 + \frac{y}{6}\right)^{-1} \log(1+y) = \\ &= \frac{e^6}{6} \cdot (1 + y + o(y)) \cdot \left(1 + (-1)\frac{y}{6} + o(y)\right) \cdot (y + o(y)) = \frac{e^6}{6} \cdot y \cdot (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Quindi

$$Df(6) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{6+y}}{y(6+y)} \log(1+y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^6}{6} \cdot (1 + o(1)) = \frac{e^6}{6}.$$

Concludiamo che la retta tangente cercata è

$$y = \frac{e^6}{6}(x-6).$$

ESERCIZIO. Determinare gli asintoti obliqui di

$$f(x) = (x-4) \arctan \left| \frac{x}{x-1} \right|.$$

Prima Soluzione.

Si ha

$$m_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right) \arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| = 1 \cdot \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} q_{\pm} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{4} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\left(1 - \frac{4}{x} \right) \arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x \left(\arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| - \frac{\pi}{4} \right) - x \frac{4}{x} \arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{x-1} \frac{\left(\arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| - \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{1}{x-1}} - 4 \arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| \right] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 4 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \pi, \end{aligned}$$

dove si è usato il limite ottenuto in [B] §9.3

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+y) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{1}{2}. \quad (1.1)$$

Seconda Soluzione.

Come sopra, si ha

$$m_{\pm} = \frac{\pi}{4}.$$

Usiamo ora il limite (1.1) nella forma

$$\arctan(1+y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}y + o(y), \quad y \rightarrow 0.$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-1} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} q_{\pm} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{4} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\left(1 - \frac{4}{x} \right) \arctan \left| 1 + \frac{1}{x-1} \right| - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\left(1 - \frac{4}{x} \right) \arctan \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\left(1 - \frac{4}{x} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{4}{x} \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{4}{x} \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{2} - \pi. \end{aligned}$$

Concludiamo che gli asintoti obliqui per $x \rightarrow \pm\infty$ coincidono con la retta

$$y = \frac{\pi}{4} \cdot x + \left(\frac{1}{2} - \pi \right).$$

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$\left| \frac{x}{x-1} \right|, \quad |\log x|, \quad |\arctan(x^2 - 1)|.$$

Soluzione.

- $f(x) = \left| \frac{x}{x-1} \right|.$

Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e

$$\frac{x}{x-1} \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty),$$

e quindi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \\ -\frac{x}{x-1}, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Dato che per ogni $x \in \text{dom}(f) \setminus \{0\}$ $f(x)$ è rapporto di funzioni derivabili con denominatore non nullo, allora è derivabile. In particolare f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e continua in $(-\infty, +\infty) \setminus \{1\}$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \mp \frac{x}{x(x-1)} = \pm 1,$$

ovvero

$$Df^+(0) = 1, \quad Df^-(0) = -1.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è un punto angoloso. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto angoloso $x_0 = 0$ è anche il punto di minimo di f .

- $f(x) = |\log x|.$

Si ha $\text{dom}(f) = (0, +\infty)$ e

$$\log x \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [1, +\infty),$$

e quindi

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & x \in [1, +\infty) \\ -\log x, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Per ogni $x \in \text{dom}(f) \setminus \{1\}$ $f(x)$ è derivabile. In particolare f è derivabile in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ e continua in $(0, +\infty)$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 1$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \pm \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{\log(1+y)}{y} = \pm 1,$$

ovvero

$$Df^+(1) = 1, \quad Df^-(1) = -1.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 1$ e il punto del grafico $(1, f(1)) = (1, 0)$ è un punto angoloso. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto angoloso $x_0 = 1$ è anche il punto di minimo di f .

- $f(x) = |\arctan(x^2 - 1)|$.

Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ e

$$\arctan(x^2 - 1) \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$

e quindi

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2 - 1), & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -\arctan(x^2 - 1), & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Per ogni $x \in \text{dom}(f) \setminus \{-1, 1\}$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili nei loro domini di definizione $h(y) = \pm \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

In particolare f è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ e continua in $(-\infty, +\infty)$.

Dato che f è pari, è sufficiente studiare la derivabilità in $x_0 = 1$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 1$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \pm \frac{\arctan(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{\arctan(y^2 + 2y)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{2y + y^2 + o(2y + y^2)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \pm \frac{2y + o(y)}{y} = \pm 2, \end{aligned}$$

ovvero

$$Df^+(1) = 2, \quad Df^-(1) = -2.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$ e i punti del grafico $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e $(1, f(1)) = (1, 0)$ sono punti angolosi.

Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che i punti $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$ sono anche i punti di minimo di f .

■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$e^{\sqrt{x}}, \quad \log(1 - x^{\frac{3}{5}}), \quad \sqrt{x + x^2}.$$

Soluzione.

- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Si ha $\text{dom}(f) = [0, +\infty)$. Per ogni $x \in (0, +\infty)$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili $h(y) = e^y$, $y \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

In particolare f è derivabile in $(0, +\infty)$ e continua in $[0, +\infty)$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

Quindi f non è derivabile da destra in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 1)$ è un punto di tangenza verticale.

Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto $x_0 = 0$ è anche il punto di minimo di f .

- $f(x) = \log(1 - x^{\frac{3}{5}})$.

Si ha $\text{dom}(f) = (-\infty, 1)$. Per ogni $x \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili $h(y) = \log y$, $y \in (0, +\infty)$ e $g(x) = 1 - x^{\frac{3}{5}}$, $x \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$.

In particolare f è derivabile in $(-\infty, 1) \setminus \{0\}$ e continua in $(-\infty, 1)$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\log(1 - x^{\frac{3}{5}})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\log(1 - x^{\frac{3}{5}})}{-x^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{-x^{\frac{3}{5}}}{x} = -\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è di tangenza verticale. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che la funzione è monotona decrescente in tutto il suo dominio di definizione.

- $f(x) = \sqrt{x + x^2}$.

Si ha $\text{dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$. Per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili $h(y) = \sqrt{y}$, $y \in (0, +\infty)$ e $g(x) = x + x^2$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

In particolare f è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ e continua in $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$, consideriamo i limiti dei rapporti incrementali

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(y-1)y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|y|}\sqrt{|y-1|}}{y} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x} = +\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = -1$ e in $x_0 = 0$ e i punti del grafico $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e in $(0, f(0)) = (0, 0)$ sono di tangenza verticale.

Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che i punti $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$ sono anche i punti di minimo di f .

■

ESERCIZIO: Dire se la funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ si può estendere per continuità in $x_0 = 0$. In tal caso studiare la derivabilità di f in $[0, +\infty)$.

Soluzione.

Si ha $\text{dom}(f) = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $x_0 = 1$ è di asintoto verticale e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$

Quindi f si può estendere per continuità ad una funzione continua da destra in $x_0 = 0$, ponendo $f(0) = 0$. La funzione estesa, che per semplicità indichiamo ancora con f ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

è continua in $[0, +\infty) \setminus \{1\}$.

Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \log(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è di tangenza verticale.

Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5.

■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$e^{\sqrt{|x|}}, \quad \sin(x^{\frac{2}{3}}), \quad \sqrt{|x + x^2|}.$$

Soluzione.

- $f(x) = e^{\sqrt{|x|}}$.

Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e continua in $\mathbb{R}$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{\sqrt{|x|}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{\sqrt{|x|}} - 1}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \pm\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 1)$ è un punto di cuspid. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto $x_0 = 0$ è anche il punto di minimo di f .

- $f(x) = \sin(x^{\frac{2}{3}})$.

Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e continua in $\mathbb{R}$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(x^{\frac{2}{3}})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \pm\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è un punto di cuspid.

- $f(x) = \sqrt{|x + x^2|}$.

Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ e continua in $\mathbb{R}$.

Per studiare la derivabilità in $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$, consideriamo i limiti dei rapporti incrementali

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} \frac{\sqrt{|x(x+1)|}}{x+1} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{|(y-1)y|}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{|y|}\sqrt{|y-1|}}{y} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{|x(x+1)|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+1|}}{x} = \pm\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = -1$ e in $x_0 = 0$ e i punti del grafico $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e $(0, f(0)) = (0, 0)$ sono punti di cuspid.

Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in [B] Cap.5. Il Lettore potrà verificare che i punti $x_0 = -1$ e in $x_0 = 0$ sono anche i punti di minimo di f .

■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$\cos(x^{\frac{1}{3}}), \quad \cos|x|, \quad \sqrt{\tan x} \quad \sqrt{|\tan x|}.$$

Soluzione.

Ragionando come negli esercizi precedenti, non è difficile verificare che:

$$f(x) = \cos(x^{\frac{1}{3}}), \quad x \in \mathbb{R}$$

è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che $(0, 1)$ è un punto di cuspid;

$$f(x) = \cos|x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R}$;

$$f(x) = \sqrt{\tan x}, \quad x \in \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

è definita, continua e derivabile in $(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$ e che i punti $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono di tangenza verticale;

$$f(x) = \sqrt{|\tan x|}, \quad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

è definita, continua e derivabile in $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ e che i punti $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono di cuspidi;

Osservazione

In TUTTI gli esercizi del §9.4 di cui sopra, lo studio della derivabilità delle funzioni date poteva essere eseguito utilizzando il Teorema di continuità della derivata, vedere [B] §9.4. Si suggerisce di verificare questo fatto per gli esercizi di cui sopra seguendo il procedimento illustrato nell' Esempio che precede il Teorema in [B] §9.4.