SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

Contents

[**B**] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.5.

§8.5

ESERCIZIO. Disporre in ordine di infinitesimo crescente le funzioni

$$e^{x^3}, \quad \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4, \quad \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right) - 1,$$

per $x \to -\infty$.

Soluzione.
Si ha

$$\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4}{e^{x^3}} = e^{-x^3}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4 = e^{-x^3}\left(\frac{1}{x^4}\right)(1+o(1))^4 = \frac{e^{-x^3}}{x^4}\cdot(1+o(1)) = \frac{e^{|x|^3}}{|x|^4}\cdot(1+o(1)),\ x \to -\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4}{e^{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{|x|^3}}{|x|^4}(1+o(1)) = +\infty,$$

e otteniamo che $e^{x^3} = o\left(\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4\right)$, per $x \to -\infty$.
Inoltre

$$\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4}{\cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right) - 1} = \frac{\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right)^2\right)} = -2\frac{(\log x)^6}{x^4}\frac{1+o(1)}{1+o(1)} \to 0,\ x \to -\infty,$$

e si conclude che

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4 = o\left(\cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right) - 1\right),\ x \to -\infty.$$

Dunque la disposizione cercata è

$$\cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right) - 1, \quad \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4, \quad e^{x^3}.$$

ESERCIZIO. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-(\log x)^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-(\log x)^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} e^{2y} e^{-y^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} e^{2y-y^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \in (0,1] \\ 0^+, & \alpha \in (1+\infty). \end{cases}$$

Quindi $e^{-(\log x)^\alpha} = o(\frac{1}{x^2})$ se $\alpha > 1$ e viceversa, se $\alpha \in (0,1]$, $\frac{1}{x^2} = o\left(e^{-(\log x)^\alpha}\right)$.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$
  Si ha
  $$x^x = e^{x\log x} \to e^0 = 1,\ x \to 0^+$$
  perché $x = o(\frac{1}{\log x})$, $x \to 0^+$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x} = -\infty$.
  Dato che $x\log x \to 0$, $x \to 0^+$, si ha
  $$\frac{x^x - 1}{x} = \frac{e^{x\log x} - 1}{x} = \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \log x \to 1 \cdot (-\infty) = -\infty,\ x \to 0^+.$$

ESERCIZIO. Disporre in ordine di infinito crescente le seguenti successioni

$$4^{n^2}, \quad 4^{n^2} n^4, \quad \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Soluzione.
Si ha

$$\frac{4^{n^2} n^4}{4^{n^2}} = n^4 \to +\infty,\ n \to +\infty,$$

e quindi 4^{n^2} è un infinito di ordine inferiore rispetto a $4^{n^2}n^4$, perché $\frac{4^{n^2}}{4^{n^2}n^4} \to 0$. D' altra parte,

$$\frac{\left(4+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{4^{n^2}n^4} = \frac{1}{n^4}\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{n^2} = e^{-\log n^4 + n^2 \log\left(1+\frac{1}{4n}\right)},$$

e in particolare

$$-\log n^4 + n^2 \log\left(1 + \frac{1}{4n}\right) = -4\log n + n^2\left(1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$n^2\left(-4\frac{\log n}{n^2} + 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^2(1 + o(1)) \to +\infty,\ n \to +\infty,$$

e quindi,

$$\frac{\left(4+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{4^{n^2}n^4} = e^{-\log n^4 + n^2\log\left(1+\frac{1}{4n}\right)} \to e^{+\infty} = +\infty,$$

e quindi $4^{n^2}n^4$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\left(4+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Abbiamo usato il fatto che

$$\log\left(1 + \frac{1}{4n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Questo è vero perché si ha

$$\log\left(1+\frac{1}{4n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dunque la disposizione cercata è

$$4^{n^2}, \quad 4^{n^2}n^4, \quad \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

ESERCIZIO. Calcolare il limite
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\cos\left(2\pi 2^{\frac{1}{y}}\right)-1}{\cos\left(2^{\frac{\pi}{y}}-1\right)-1}$$

Prima Soluzione.

Si ha
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\cos\left(2\pi 2^{\frac{1}{y}}\right)-1}{\cos\left(2^{\frac{\pi}{y}}-1\right)-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos(2\pi 2^x)-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}.$$
Osserviamo poi che
$$\frac{\cos(2\pi 2^x)-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}=\frac{\cos(2\pi 2^x-2\pi+2\pi)-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}=\frac{\cos(2\pi(2^x-1))-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1},$$
e quindi,
$$\frac{\cos(2\pi 2^x)-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}=\frac{\cos(2\pi(2^x-1))-1}{(2\pi(2^x-1))^2}\frac{(2\pi(2^x-1))^2}{(2^{\pi x}-1)^2}\frac{(2^{\pi x}-1)^2}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}.$$
Ora, dato che $2^x-1\to0$, $x\to0$, e $2^{\pi x}-1\to0$, $x\to0$, si ha
$$\frac{\cos(2\pi(2^x-1))-1}{(2\pi(2^x-1))^2}\to-\frac{1}{2},\ x\to0,$$
$$\frac{(2^{\pi x}-1)^2}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}\to-2,\ x\to0,$$
e quindi
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\cos\left(2\pi 2^{\frac{1}{y}}\right)-1}{\cos\left(2^{\frac{\pi}{y}}-1\right)-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{(2\pi(2^x-1))^2}{(2^{\pi x}-1)^2},$$
se l' ultimo limite esiste. Ora osserviamo che
$$\frac{(2\pi(2^x-1))}{(2^{\pi x}-1)}=\frac{(2\pi(2^x-1))}{x\log2}\frac{x\log2}{x\pi\log2}\frac{x\pi\log2}{(2^{\pi x}-1)}\to2,\ x\to0,$$
e quindi
$$\lim_{x\to0^+}\frac{(2\pi(2^x-1))^2}{(2^{\pi x}-1)^2}=4.$$

Seconda Soluzione.

Si ha
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\cos\left(2\pi 2^{\frac{1}{y}}\right)-1}{\cos\left(2^{\frac{\pi}{y}}-1\right)-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos(2\pi 2^x)-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}.$$
Osserviamo poi che
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos(2\pi 2^x)-1}{\cos(2^{\pi x}-1)-1}=\lim_{t\to1^+}\frac{\cos(2\pi t)-1}{\cos(t^\pi-1)-1}=\lim_{s\to0^+}\frac{\cos(2\pi+2\pi s))-1}{\cos((1+s)^\pi-1)-1}=$$
$$\lim_{s\to0^+}\frac{\cos(2\pi s)-1}{\cos((1+s)^\pi-1)-1}=\lim_{s\to0^+}\frac{1-\frac{(2\pi s)^2}{2}+o(s^2)-1}{\cos(1+\pi s+o(s)-1)-1}=\lim_{s\to0^+}\frac{-2\pi^2s^2+o(s^2)}{\cos(\pi s+o(s))-1}=$$
$$\lim_{s\to0^+}\frac{-2\pi^2s^2+o(s^2)}{1-\frac{(\pi s)^2}{2}+o(s^2)-1}=\lim_{s\to0^+}\frac{s^2}{s^2}\cdot\frac{-2\pi^2+o(1)}{-\frac{\pi^2}{2}+o(1)}=\frac{-2\pi^2}{-\frac{\pi^2}{2}}=4,$$
dove abbiamo usato il fatto che
$$\cos(\pi s+o(s))-1=1-\frac{1}{2}(\pi s+o(s))^2+o((\pi s+o(s))^2)-1=-\frac{1}{2}\pi^2s^2+o(s^2)+o(s^2)=-\frac{1}{2}\pi^2s^2+o(s^2).$$

Il ragionamento per

$$\cos(2\pi s) - 1 = -2\pi^2 s^2 + o(s^2),$$

è analogo.